

УДК 517.9

УСТАНОВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЕТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

© 2016 г. А. А. Короновский^{1, 2}, О. И. Москаленко^{1, 2}, А. А. Пивоваров¹, А. Е. Храмов^{1, 2}

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Проведено исследование процессов установления явления обобщенной хаотической синхронизации в сети взаимно связанных потоковых систем. Исследован характер поведения элементов сети при переходе от асинхронной динамики к синхронной при увеличении параметра связи. Для выяснения особенностей взаимодействия элементов сети и возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации использованы метод ближайших соседей и расчет спектра показателей Ляпунова.

DOI: 10.7868/S0367676516020150

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных типов хаотической синхронизации, таких как фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием (lag-синхронизация), полная синхронизация, в настоящее время привлекает большое внимание исследователей [1]. Среди различных типов синхронной динамики высокий интерес вызывает исследование такого явления, как обобщенная хаотическая синхронизация [2–4]. Явление обобщенной хаотической синхронизации может возникать между различными осцилляторами, в том числе между осцилляторами с разной размерностью фазового пространства. Индикатором установления режима обобщенной синхронизации является наличие функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих осцилляторов. Ранее уже были исследованы системы как с дискретным временем, связанные однонаправленно и взаимно [5], так и потоковые системы с однонаправленной [6] и взаимной [7] связью (включая пространственно-распределенные системы [8–10]).

Следующим этапом в исследовании явления обобщенной синхронизации стало исследование сетей нелинейных элементов. Был изучен процесс установления режима обобщенной синхронизации при переходе от асинхронной динамики к синхронной в малой сети логистических отображений [7]. Следует отметить, что в силу сложности рассматриваемых систем [8] в данном на-

правлении исследований на текущий момент существует много вопросов. Вопросы, связанному с установлением режима обобщенной хаотической синхронизации в сети взаимно связанных потоковых систем, и посвящена настоящая работа.

МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве модельной сети связанных между собой потоковых систем в данной работе выбрана сеть, состоящая из $N = 5$ взаимно связанных осцилляторов Ресслера. Эволюция i -го элемента сети ($i = 1, \dots, N$) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j, \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= p + z_i (x_i - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ – управляющие параметры, ε – коэффициент связи, C_{ij} – матрица связи ($C_{ij} = 0$ – отсутствие связи между элементами, $C_{ij} = 1$ – каждый элемент сети взаимодействует с остальными), $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 0.9525$, $\omega_3 = 0.955$, $\omega_4 = 0.9575$, $\omega_5 = 0.96$. Тип связи между элементами сети при рассмотрении был выбран в виде “каждый с каждым”, т.е. $C_{ij} = 1$.

Для детектирования режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах классическим является метод вспомогательной системы [11], но этот метод не подходит для исследования взаимодействия систем, связанных взаимно, по причинам, изложенным в работах [8, 11–13]. Таким образом, необходимо приме-

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.”.

нять иные методы, например, расчет спектра показателей Ляпунова [12, 14]. При рассмотрении двух связанных осцилляторов критерием наличия обобщенной синхронизации является переход через ноль в область отрицательных значений одного из двух старших положительных показателей Ляпунова, тогда как другой старший показатель Ляпунова остается положительным [6, 15] (ситуация с двумя положительными показателями Ляпунова автономных осцилляторов, т.е. режим гиперхаотического колебаний, в данной работе не рассматривается). В случае же сети, состоящей из N нелинейных элементов, при малых значениях параметра связи спектр показателей Ляпунова будет характеризоваться N положительными величинами, которые с увеличением параметра связи будут последовательно переходить в область отрицательных значений [8]. Для сети из пяти связанных осцилляторов Ресслера критерием возникновения режима обобщенной синхронизации в системе будет служить переход в область отрицательных значений четырех из пяти показателей Ляпунова (первый показатель остается положительным).

На рис. 1а представлена зависимость пяти показателей Ляпунова для рассматриваемой системы взаимно связанных осцилляторов Ресслера (1) от величины параметра связи ε . Зависимость $\lambda_i(\varepsilon)$ ($i = 1, \dots, 5$) можно разделить на три области (рис. 1а): (I) $\varepsilon \in [0; 0.032]$ – область асинхронной динамики; (II) $\varepsilon \in (0.032; 0.0385]$ – область перехода к режиму обобщенной синхронизации, и (III) – область, соответствующая режиму обобщенной хаотической синхронизации. В области перехода к режиму обобщенной хаотической синхронизации четыре показателя Ляпунова последовательно меняют знак, пересекая ось абсцисс (рис. 1б). Момент смены знака вторым по старшинству показателем Ляпунова (т.е. окончательного перехода к режиму обобщенной синхронизации) при значении параметра связи $\varepsilon = 0.0385$ отмечен на рис. 1б стрелкой. Таким образом, на границах области II система демонстрирует соответственно асинхронную ($\varepsilon < 0.032$) и синхронную ($\varepsilon > 0.0385$) динамику. В то же самое время, в отличие от случая двух осцилляторов, граница между асинхронной и синхронной динамикой в данном случае размыта, и имеет место постепенная перестройка динамики элементов сети, основные механизмы и закономерности которой пока неизвестны.

Для того чтобы выявить детали процессов, происходящих в области II, где происходит последовательная постепенная смена знака показателей Ляпунова, был использован метод ближайших соседей [8]. Суть метода состоит в том, что

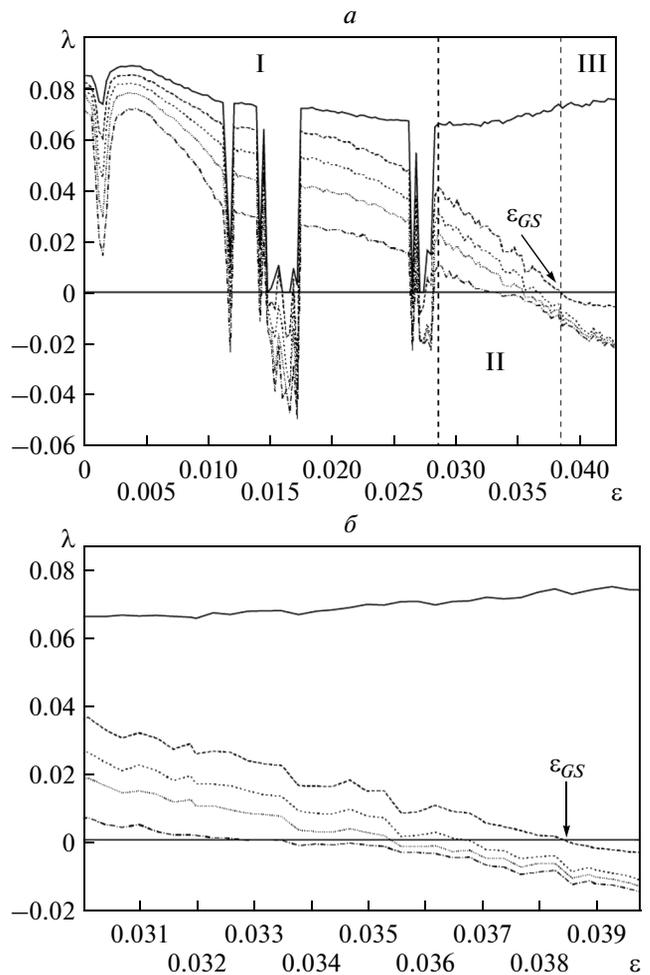


Рис. 1. а – зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи ε , (б) область значений II в более крупном масштабе.

при рассмотрении динамики связанных осцилляторов в одном из них необходимо выбрать опорную точку x_n^l и найти ближайших соседей выбранной опорной точки x_j^l . Затем необходимо зафиксировать образы ближайших соседей x_j^m в фазовых пространствах остальных осцилляторов [8], а в качестве численной характеристики синхронизма следует рассматривать величину дисперсии значения расстояний между образами ближайших соседей x_j^m .

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ходе исследования два значения параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$ и $\varepsilon_2 = 0.038$ были выбраны таким образом, что при значении ε_1 только один показатель Ляпунова отрицательный, тогда как при

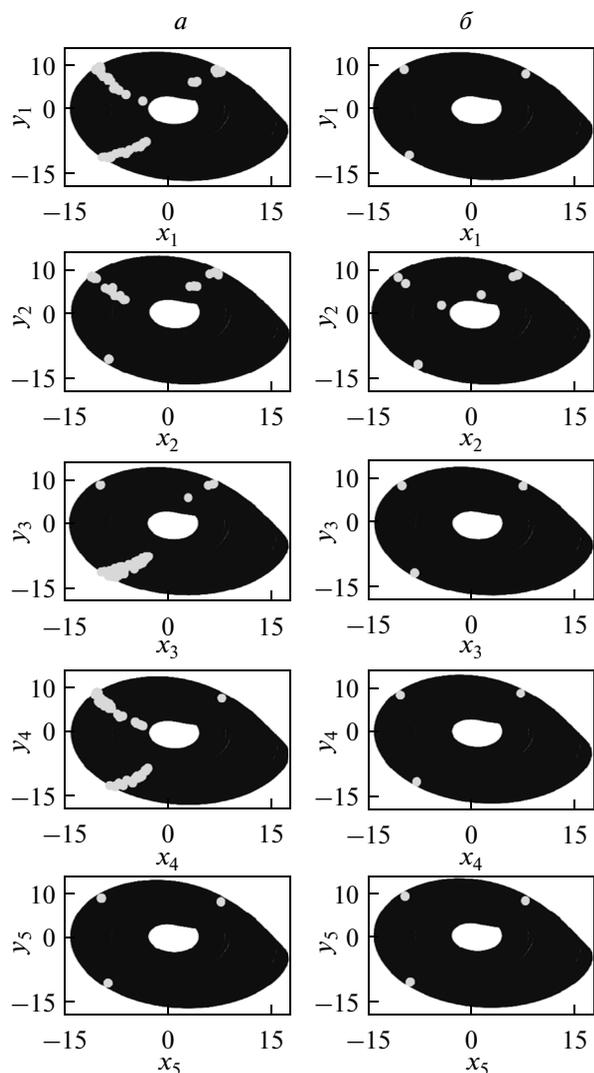


Рис. 2. Фазовые портреты пяти рассматриваемых осцилляторов для двух значений параметра связи: $\varepsilon_1 = 0.0345$ (а) и $\varepsilon_2 = 0.038$ (б).

значении параметра связи ε_2 уже три показателя отрицательные (рис. 1б). На рис. 2а и 2б приведены фазовые портреты пяти взаимодействующих осцилляторов Ресслера рассматриваемой сети для двух значений коэффициента связи ε_1 и ε_2 соот-

ветственно. На фазовых портретах трех осцилляторов $i = 2, \dots, 4$ были выбраны три опорные точки (одна для каждой системы). Затем в соответствии с методом, описанным выше, были найдены их ближайшие соседи и соответствующие им образы во всех остальных связанных системах. Нетрудно заметить, что при $\varepsilon_1 = 0.0345$ (рис. 2а) на фазовых портретах четырех из пяти осцилляторов точки сосредоточены в ограниченной области аттрактора и распределены вдоль радиуса, в то время как на фазовом портрете пятого осциллятора $i = 5$ образы ближайших соседей оказываются близкими и размытие состояний не наблюдается. В то же время при значении параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$ на фазовых портретах всех осцилляторов за исключением второго осциллятора $i = 2$ образы ближайших соседей имеют близкие значения. Данные наблюдения подтверждаются значениями величин дисперсии расстояний между ближайшими соседями для рассматриваемых узлов сети, которые приведены в табл. 1 и 2. Номера столбцов в таблицах соответствуют номерам узлов, в которых была фиксирована опорная точка x_n^i , номера строк соответствуют номерам тех узлов, в отношении которых выясняется характер взаимодействия.

При рассмотрении полученных значений нетрудно заметить, что величина дисперсии для некоторых пар узлов сети резко отличается от остальных. В соответствии с методом ближайших соседей можно сделать вывод о том, что при малой величине дисперсии (в рассматриваемом случае $\sim 10^{-4}$) рассматриваемые элементы синхронизованы с точки зрения обобщенной синхронизации, тогда как в случае большей дисперсии ($\sim 10^{-1}$) элементы еще не находятся в режиме синхронизма. В таком случае можно сделать вывод о том, что при значении параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$ четыре осциллятора Ресслера из пяти демонстрируют синхронную (в смысле обобщенной хаотической синхронизации) динамику. Противоположная ситуация наблюдается на другом конце области Π при значении параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$, где только вторая система демонстрирует асинхронную ди-

Таблица 1. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	5.57E-01	3.66E-02	4.82E+00	1.22E+00
x_2	4.94E+00	—	2.72E-01	3.54E+00	4.18E+00
x_3	6.62E-01	4.72E-02	—	8.11E-01	5.65E-02
x_4	2.06E+00	9.97E-01	9.50E-01	—	7.03E-01
x_5	4.19E-05	2.92E-05	6.95E-03	4.37E-04	—

Таблица 2. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	5.20E-05	3.21E-04	2.78E-04	1.83E-04
x_2	7.64E-02	—	6.23E-02	2.58E-01	2.91E-02
x_3	3.09E-05	3.10E-05	—	3.10E-05	3.13E-05
x_4	2.67E-05	3.40E-05	5.45E-05	—	2.01E-05
x_5	6.94E-05	9.14E-05	1.39E-04	9.14E-05	—

намику, тогда как остальные элементы сети синхронизованы друг с другом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе проведено исследование явления обобщенной синхронизации в сети связанных взаимно осцилляторов Ресслера. С использованием методов расчета спектра показателей Ляпунова и метода ближайших соседей выявлен характер взаимодействия нелинейных элементов сети в области перехода от асинхронной динамики к синхронной.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00224). Научная деятельность А.Х. поддержана также грантом Министерства образования и науки РФ (№ 931).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Univ. Press, Cambridge, England, 2001.
2. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 980.
3. *Dmitriev B.S., Hramov A.E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 074101.
4. *Filatov R.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301.
5. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E.* // Chaos, Solitons, Fractals. 2013. V. 46. P. 12.
6. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528.
7. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A., Hramov A.E.* // Techn. Phys. Lett. 2015. V. 16. P. 1–7.
8. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. 036216.
9. *Короновский А.А., Понов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). P. 748.
10. *Moskalenko O.I., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ovchinnikov A.A.* // Europhys. J. B. 2011. V. 82(1). P. 69.
11. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72(3). 037201.
12. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. 064901.
13. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 84(3). 037201.
14. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
15. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. 5183.