

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРА РЕКУРРЕНТНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ТОЧНОСТЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРЕДСКАЗАНИЯ ДИНАМИКИ СТОХАСТИЧЕСКОГО НЕЙРОНА ФИТЦХЬЮ–НАГУМО

© 2025 г. Н. Д. Кулагин*, А. В. Андреев, А. Е. Храмов

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта», Калининград, Россия

**E-mail: kulagin.nikita03@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 15.10.2024 г.

Принята к публикации 29.11.2024 г.

Изучено качество предсказания сетью на основе резервуарных вычислений динамики модельного нейрона ФитцХью–Нагумо, возбуждаемого белым шумом, в зависимости от размера резервуара. Показано, что точность предсказания сигнала нейрона сильно зависит от числа нейронов в резервуаре. Наиболее точное предсказание как самой динамики, так и моделирования явления когерентного резонанса, достигается при использовании 500 нейронов.

Ключевые слова: модель ФитцХью–Нагумо, резервуарные вычисления, стохастическая система, когерентный резонанс, нелинейная динамика

DOI: 10.31857/S0367676525030284, EDN: FUODPS

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время рекуррентные нейронные сети стали широко используемым инструментом для предсказания различных временных зависимостей [1]. В частности, они применяются для предсказания пространственно-временной динамики сложных нелинейных систем, таких как распространение импульсов в оптоволокне [2], системы дифференциальных уравнений Лоренца и Курамото–Сивашинского [3], а также логистического отображения и отображения Эно [4]. Хаотическая природа подобных систем делает их весьма сложными для предсказания.

В особенности важной для предсказания является нелинейная динамика электрической активности биологических нейронов. Искусственные нейронные сети уже были успешно использованы для классификации данных активности нейронов головного мозга [5]. Дальнейшему развитию методов предсказания на основе данных нейронной активности может способствовать изучение возможности применения нейросетей для моделирования динамики математических моделей нейронов. К подобным моделям относятся системы Ходжкина–Хаксли, ФитцХью–Нагумо, и Хиндмарша–Роуза [6–8]. В подобных системах в возбужденном состоянии, находясь под внешним шумовым воздействи-

ем, может возникать эффект когерентного резонанса, характеризующийся наличием определенной амплитуды шума, при которой когерентность вызываемых осцилляций достигает максимума [9–11].

Для моделирования поведения стохастического нейрона ФитцХью–Нагумо, в том числе явления когерентного резонанса, была использована рекуррентная сеть на базе резервуарных вычислений, которая ранее продемонстрировала высокую способность к воспроизведению динамики исходной системы при разных уровнях шума, обучившись лишь на одном из них [12]. Также резервуарные вычисления использовались для предсказания динамики связанных сетей осцилляторов [13].

Целью настоящего исследования является изучение влияния числа нейронов резервуара на способность рекуррентной сети предсказывать динамику нейрона ФитцХью–Нагумо, возбуждаемого извне белым шумом, а также моделировать явление когерентного резонанса.

МОДЕЛЬ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО

В качестве модельного нейрона для обучения и тестирования сети на основе резервуарных вычислений используется модель

ФитцХью–Нагумо, описываемая следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I, \quad \dot{y} = \frac{x + a - by}{\tau} + D\xi(t), \quad (1)$$

где x обозначает быструю переменную системы, которая интерпретируется как мембранный потенциал, y – медленная переменная восстановления, $I = 0.3$ – значение внешнего постоянного тока, $a = 0.7$ и $b = 0.8$ – параметры системы. Параметр $\tau = 12.5$ разделяет временные масштабы быстрой и медленной переменных, $\xi(t)$ – белый шум с нулевым средним и единичной дисперсией, значение D регулирует его амплитуду. При данных значениях параметров система ФитцХью–Нагумо находится в допороговом стационарном режиме, при котором воздействие шума $\xi(t)$ способно вызывать в системе спайки.

Для интегрирования системы использовался метод Эйлера с шагом интегрирования $dt = 0.1$.

МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Используемая модель нейронной сети состоит из трех слоев: слой входных нейронов, скрытый слой рекуррентных нейронов (резервуар), и слой выходных нейронов (рис. 1).

Слой входных нейронов принимает на вход вектор входных значений $i(t)$, включающий в себя значения переменных $x(t)$ и $y(t)$, а также отмасштабированное значение шума $D\xi(t)$. Каждый из входных сигналов связан с $\frac{N_{RC}}{3}$ нейронов резервуара, где N_{RC} – общее число рекуррентных нейронов. Силы связи между входными сигналами и нейронами резервуара определяются матрицей входных весов W_{in} , значения которой взяты случайным образом из равномерного интервала $[-1, 1]$.

Рекуррентные связи между нейронами резервуара определяются матрицей W_r , начальные значения которой распределены равномерно в интервале $[0, 1]$. Плотность матрицы W_r равна $\frac{d}{N_{RC}}$,

где d – регулируемый гиперпараметр. После этого W_r ремасштабируется в соответствии со следующей формулой:

$$W_r^* = \frac{W_r}{\rho_0} \rho, \quad (2)$$

где W_r^* – ремасштабированная матрица весов скрытого слоя, ρ_0 – изначальное значение спектрального радиуса W_r , ρ – гиперпараметр, устанавливающий новое значение спектрального радиуса данной матрицы. Внутреннее состояние скрытого слоя h в момент времени t определяется следующим образом:

$$h(t) = \tanh(W_{in}i(t) + W_r h(t - dt)). \quad (3)$$

Слой выходных нейронов принимает на вход вектор усиленного состояния резервуара $\hat{h}(t)$, который получается из $h(t)$ путем возведения в квадрат половины значений с четными индексами, и линейно преобразует его в вектор предсказанных значений $\tilde{i}(t + dt)$ в соответствии с формулой:

$$\tilde{i}(t + dt) = W_{out}\hat{h}(t), \quad (4)$$

в которой W_{out} – матрица выходных весов, значения которой определяются в результате обучения с использованием регуляризации Тихонова. При этом вектор $\tilde{i}(t + dt)$ включает в себя исключительно значения переменных $\tilde{x}(t + dt)$ и $\tilde{y}(t + dt)$, предсказания отмасштабированных значений белого шума $D\xi(t)$ не происходит.

Схема используемой сети на основе резервуарных вычислений при обучении изображена на рис. 1а. Данные дискретизированного сигнала ФитцХью–Нагумо для обучения нейронной сети поделены на две части: переходный период ($t = 0$ –1000 сек), значения которого используются только для обновления состояния резервуара, и период обучения ($t = 1000$ –3000 сек). Во время процесса обучения сети на каждом временном шаге подается на вход вектор входных сигналов $i(t)$, после чего на выходе получается вектор

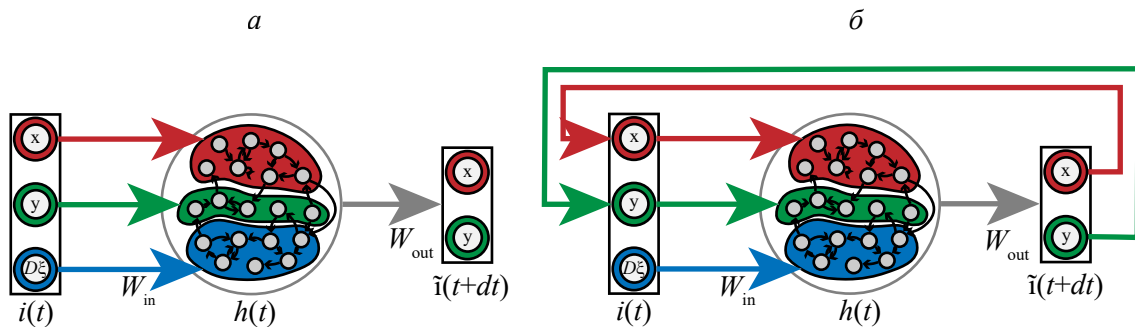


Рис. 1. Схематическое изображение сети на основе резервуарных вычислений во время процесса обучения (а) и тестирования (предсказания) (б).

предсказанных значений следующего временно-го шага $\tilde{t}(t + dt)$. Полученные данные используются для подбора выходных весов путем минимизации следующей функции с использованием метода регуляризации Тихонова:

$$\sum_{t=1000}^{3000} \|\tilde{t}(t) - \tilde{t}(t)\|^2 + \alpha \|W_{\text{out}}\|. \quad (5)$$

$\tilde{t}[t]$ обозначает вектор целевых значений, α — параметр регуляризации с установленным значением 10^{-4} , служащий для предотвращения переобучения.

Процесс тестирования обученной сети на основе резервуарных вычислений изображен на рис. 2б. Вначале, аналогично процессу обучения, сигнал в диапазоне $t = 0-1000$ сек непрерывно подается в качестве входных данных, выходные данные при этом отбрасываются, что необходимо для обновления состояния резервуара. После этого происходит процесс предсказания, при котором сеть начинает использовать собственные предсказания $\tilde{t}(t)$ в качестве входных сигналов для предсказания последующих значений $\tilde{t}(t + dt)$. Данные белого шума $D\xi(t)$ при этом продолжают подаваться в систему извне.

Для оптимизации сети на основе резервуарных вычислений использовался поиск по сетке, в процессе которого исследовались диапазоны $d \in [10, 20]$ и $\rho \in [0.5, 1.9]$ с шагами 1 и 0.1

соответственно. Для каждого из наборов гиперпараметров проводилось обучение сети и предсказание сигнала для тестирования в диапазоне $t = 3000-5000$ сек. Для оценки качества предсказания использовался корень среднеквадратической ошибки (RMSE):

$$RMSE = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n (\tilde{x}_j - \bar{x}_j)^2, \quad (6)$$

где $\bar{x}$ — целевое значение переменной x , n — общее количество предсказанных точек.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Для изучения влияния размера скрытого слоя сети на основе резервуарных вычислений изучался диапазон N_{RC} от 100 до 1000 нейронов с шагом 100. Были рассмотрены два варианта: обучение сети на сигнале стохастического нейрона с амплитудами шума $D_0 = 0.05$ и $D_0 = 0.2$. Значения RMSE при предсказании оптимизированными сетями сигналов с $D = D_0$ в диапазоне $t = 3000-53000$ сек представлены на рис. 2а. Точность при минимальном рассматриваемом размере резервуара $N_{RC} = 100$ получается относительно низкой для обеих обученных сетей, однако качество предсказания резко увеличивается при увеличении N_{RC} и достигает максимума при 500. Дальнейшее увеличение N_{RC} приводит к постепенному ухудшению точности воспроизведе-

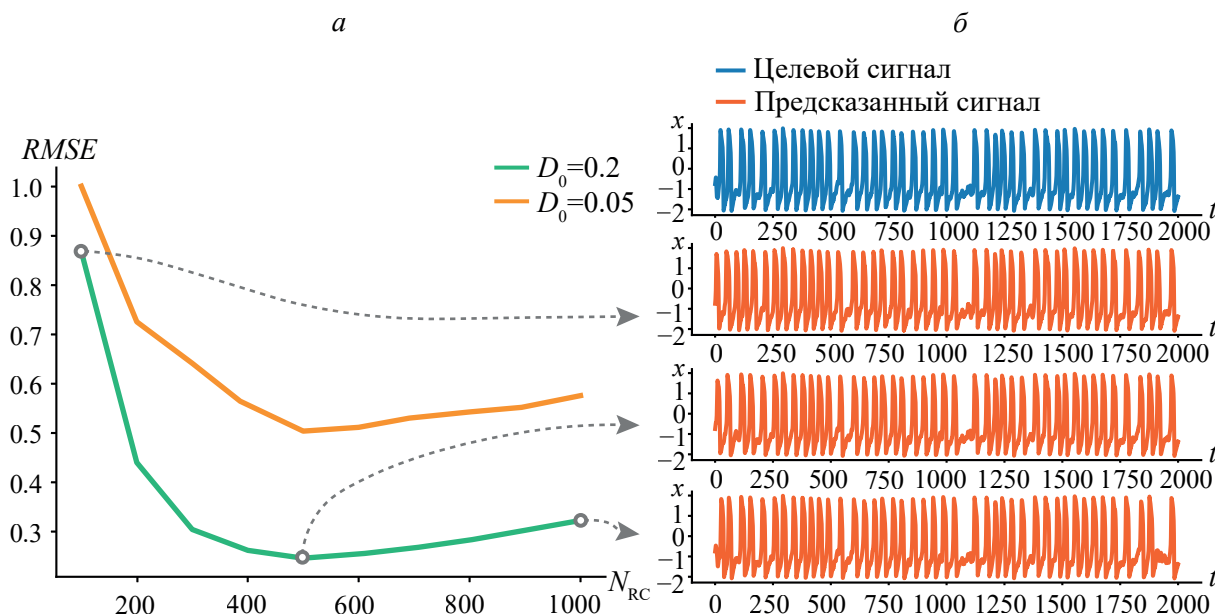


Рис. 2. Зависимость RMSE от числа нейронов резервуара N_{RC} при обучении сети на основе резервуарных вычислений на сигнале с уровнями шума $D_0^1 = 0.05$ и $D_0^2 = 0.2$ при предсказании сигналов с аналогичным уровнем шума (а) и временная динамика целевого сигнала стохастического нейрона ФитцХью–Нагумо с уровнем шума $D = 0.2$ и предсказаний сети с размером резервуара N_{RC} , равным 100, 500 и 1000 (б).

ния динамики. Также заметно, что сеть, обученная на сигнале с $D_0 = 0.2$, во всех случаях воспроизводит временную динамику с аналогичным уровнем шума лучше, чем сеть, обученная на сигнале с $D_0 = 0.05$.

На рис. 2б представлены временные ряды динамики исходного нейрона ФитцХью–Нагумо и предсказаний сети на основе резервуарных вычислений с $D_0 = 0.2$ и N_{RC} , равным, соответственно, 100, 500 и 1000. Как видно, даже при $N_{RC} = 100$ сеть способна моделировать общую динамику стохастического нейрона, однако заметно отличие времени генерации некоторых спайков от исходной системы.

После этого каждая из трех обученных сетей, результаты которых были представлены на рис. 2б, была использована для предсказания временных рядов ФитцХью–Нагумо с диапазоном D от 0.05 до 1 с шагом 0.05 в диапазоне $t = 3000–53000$ сек. Для оценки соответствия статистических характеристик предсказанных сигналов исходной модели используется коэффициент вариации R :

$$R = \frac{\sigma}{\mu}, \quad (7)$$

где σ — стандартное отклонение межспайковых интервалов сигнала, μ — среднее значение межспайковых интервалов.

Результаты моделирования стохастического нейрона под различным шумовым воздействием показаны на рис. 3а. Наиболее схожую с исходной моделью динамику зависимости R от D продемонстрировала сеть с $N_{RC} = 500$, которая также демонстрировала лучшие результаты при предсказании одного сигнала с $D = 0.2$. Сеть с $N_{RC} = 1000$ также показала схожую динамику, од-

нако при высоком уровне шума она значительно отклоняется от целевой кривой. При $N_{RC} = 100$ же сеть не способна корректно воспроизводить зависимость стохастического нейрона от амплитуды шума, близкий к исходной системе коэффициент вариации был достигнут лишь при $D = 0.3$.

Далее, для оценки зависимости общей моделирующей способности сети от размера резервуара N_{RC} , были получены данные предсказания сигналов нейрона ФитцХью–Нагумо для всего диапазона N_{RC} от 100 до 1000. Для сравнения зависимости R от D обученной сети и стохастического нейрона используется значение Δ , характеризующее интегральную разницу между предсказанной кривой зависимости и целевой:

$$\Delta = \sqrt{\int (R(D) - R_{RC}(D))^2 dD}. \quad (8)$$

Значения показателя Δ для сетей на основе резервуарных вычислений с каждым из рассматриваемых значений N_{RC} представлены на рис. 3б. В соответствии с предыдущими результатами, наибольшую предсказательную способность продемонстрировала сеть с $N_{RC} = 500$, наименьшую — с $N_{RC} = 100$. Аналогично рис. 2а, наблюдается резкое улучшение качества моделирования при увеличении N_{RC} от 100 до 500, после чего ошибка предсказания начинает постепенно увеличиваться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании сеть на основе резервуарных вычислений была успешно обучена воспроизводить динамику возбудимой модели

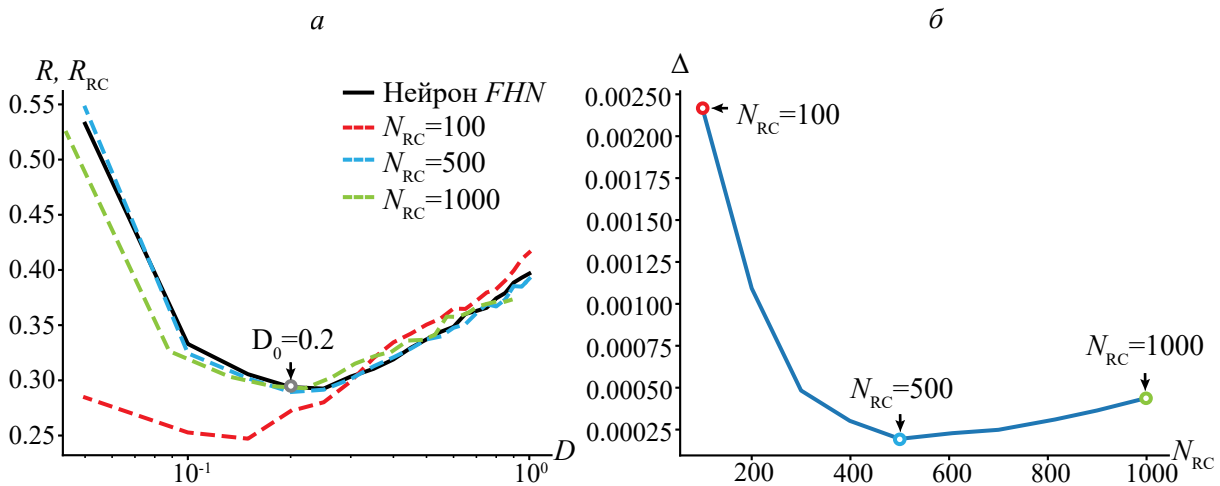


Рис. 3. Зависимость коэффициентов вариации стохастического нейрона ФитцХью–Нагумо R_{RC} и предсказанных сигналов сети на основе резервуарных вычислений R от амплитуды подаваемого белого шума D (а) и зависимость производительности прогнозирования Δ от числа нейронов резервуара N_{RC} (б).

ФитцХью–Нагумо с различной амплитудой подаваемого шума, обучив ее на одном, среднем, уровне шума. При этом наблюдается увеличение качества моделирования сигнала нейрона ФитцХью–Нагумо при увеличении размера резервуара до среднего значения, после чего наблюдалось постепенное ухудшение предсказания при дальнейшем добавлении рекуррентных нейронов в скрытый слой.

При минимальном размере резервуара было достигнуто достаточно корректное предсказание сигнала стохастического нейрона лишь с одной амплитудой шума, в остальных случаях наблюдается значительное отклонение от статистических данных исходной модели. При среднем и высоком размере скрытого слоя наблюдалось высокое качество моделирования на всем диапазоне интенсивности белого шума, однако при самом высоком уровне шума сеть среднего размера продемонстрировала лучшие результаты.

Данные результаты показывают наличие оптимального размера скрытого слоя сети на основе резервуарных вычислений при предсказании стохастического сигнала, при отклонении от которого качество моделирования исходной системы начинает ухудшаться.

Работа была проведена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-10072).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hewamalage H., Bergmeir C., Bandara K. // *Int. J. Forecast.* 2021. V. 37. No. 1. P. 388.
2. Salmela L., Tsipinakis N., Foi A. et al. // *Nature Mach. Intell.* 2021. V. 3. No. 4. P. 344.
3. Vlachas P.R., Pathak J., Hunt B.R. et al. // *Neural Networks.* 2020. V. 126. P. 191.
4. Sangiorgio M., Dercole F. // *Chaos Soliton. Fract.* 2020. V. 139. Art. No. 110045.
5. Batmanova A., Kuc A., Maksimenko V. et al. // *Mathematics.* 2022. V. 10. No. 17. Art. No. 3153.
6. Hodgkin A.L., Huxley A.F. // *J. Physiol.* 1952. V. 117. No. 4. P. 500.
7. FitzHugh R. // *Biophys J.* 1961. V. 1. No. 6. P. 445.
8. Hindmarsh J.L., Rose R.M. // *Proc. Royal. Soc. Lond. B.* 1984. V. 221. No. 1222. P. 87.
9. Lee S., Neiman A., Kim S. // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. No. 3. P. 3292.
10. Pikovsky A.S., Kurths J. // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. No. 5. P. 775.
11. Wu S., Ren W., He K., Huang Z. // *Phys. Lett. A.* 2001. V. 279. No. 5-6. P. 347.
12. Hramov A.E., Kulagin N., Andreev A.V., Pisarchik A.N. // *Chaos Soliton. Fractal.* 2024. V. 178. Art. No. 114354.
13. Andreev A.V., Badarin A.A., Maksimenko V.A., Hramov A.E. // *Chaos.* 2022. V. 32. No. 10. Art. No. 103126.

Analysis of the effect of a recurrent neural network size on modeling and prediction accuracy of a stochastic FitzHugh–Nagumo neuron

N. D. Kulagin*, A. V. Andreev, A. E. Hramov

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, 236041 Russia

**e-mail: kulagin.nikita03@gmail.ru*

We study the performance of a reservoir computing-based network in dynamics forecast of a FitzHugh–Nagumo model driven by white noise versus reservoir size. We show that the accuracy of signal prediction of a model neuron strongly depends on the number of neurons in the reservoir. The most accurate prediction of both the dynamics itself and the simulation of the coherence resonance phenomenon is achieved when using 500 neurons.

Keywords: FitzHugh–Nagumo model, reservoir computing, stochastic system, coherence resonance, nonlinear dynamics