01

Эволюция пространственно-временного хаоса в дискретно-непрерывной активной среде

© *В.А. Максименко*[1], *Д.Э. Постнов*[2], *А.А. Короновский*[2], *В.В. Макаров*[1], *А.Е. Храмов*[1]

[1] Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов
[2] Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов
E-mail: maximenkovl@gmail.com

Поступило в Редакцию 28 апреля 2017 г.

Для диагностики степени регулярности волновых структур в модельной нейросистеме предложен и применен специальный подход к расчету спектра показателей Ляпунова. Продемонстрирован и охарактеризован количественно переход между режимами регулярной волновой динамики и развитого пространственно-временного хаоса.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.12.44714.16443

Развитие знаний о функционировании мозга заставляет периодически пересматривать парадигмы физических моделей нейросистем. В частности, современные представления о совокупности процессов, сопровождающих такие явления, как распространяющаяся кортикальная депрессия, мигрень, волны деполяризации при мозговых травмах или инсульте, выходят далеко за рамки модельного представления ансамбля нейронов как дискретного набора активных элементов с той или иной топологией межэлементных связей [1–4]. В данных случаях указанный дискретный набор элементов оказывается „встроен“ в диффузионную среду, которая играет роль аккумулятора и проводника веществ, управляющих активностью нейронов. При этом адекватные поставленной задаче математические модели принадлежат к классу дискретно-непрерывных систем, исследование динамики которых зачастую требует специального подхода. На максимально упрощенном уровне такая нейросистема может быть описана с помощью трехкомпонентной модели типа реакция–диффузия, в которой уравнение в частных производных описывает распространения веществ (ионы калия, глутамат калия) в межклеточном пространстве, в то время как набор обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) определен в дискретном наборе позиций и характеризует активность популяции нейронов [5].

Целью данной работы является количественный анализ обнаруженного при численном моделировании эффекта перехода от режима пространственно-временного хаоса к регулярному режиму бегущих волн в модельной системе, описывающей дискретную популяцию нейронов ФитцХью–Нагумо [6], размещенных в узлах двумерной пространственной сетки и взаимодействующих друг с другом посредством диффузионной связи по дополнительной переменной, непрерывно распределенной в пространстве взаимодействия.

Рассмотрим исследуемую математическую модель. В предположении, что нейроны располагаются в точках с координатами $r_{ij} = (x_i, y_j)$, где $x_i = ihx, y_j = jhy$, а h — пространственный шаг, их динамика может быть описана при помощи набора ОДУ следующим образом:

$$\varepsilon_v \frac{dv_{ij}(t)}{dt} = v_{ij}(t) - v_{ij}^3(t)/3 - w_{ij}(t) + z(x_i, y_j, t),$$
$$\tau_l \frac{dw_{ij}(t)}{dt} = A + Bv_{ij}(t) - w_{ij}(t), \tag{1}$$

где $v_{ij}(t)$ и $w_{ij}(t)$ — переменные, характеризующие электрическую активность каждого нейрона, $i, j = \overline{1, 40}$. В свою очередь, функция $z(x_i, y_j, t)$, определенная непрерывно на пространстве $\mathbf{r} = (x, y)$, описывает пространственно-временную эволюцию концентрации веществ в межклеточном пространстве [5]

$$\varepsilon_z \frac{\partial z}{\partial t} = \alpha_z \Psi(v) - z + \gamma \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right),$$
$$\Psi(v) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{v}{v_s} \right) \right). \tag{2}$$

В уравнении (2) $\Psi(v)$ представляет собой логистическую функцию, зависящую от значения v и имеющую два асимптотических предела — ноль и единицу. Уравнения (1) и (2) дополняются граничными условиями, причем граничные условия для переменной z определяются особенностями задачи. В данной работе исследуемая активная среда моделировалась прямоугольным пространством размера $L_x \times L_y$ ($L_x = 1$, $L_y = 1$) со смешанными граничными условиями. В частности, граница для координаты y описывалась граничными условиями Неймана и Дирихле, граничные условия для координаты x были периодическими:

$$\varepsilon_z \frac{dz_{1,j}}{dt} = \alpha_z \Psi(v_{1,j}) - z_{1,j} + \gamma(z_{2,j} - z_{1,j}) + k_d \gamma(z_{N,j} - z_{1,j}),$$
$$\varepsilon_z \frac{dz_{N,j}}{dt} = \alpha_z \Psi(v_{N,j}) - z_{N,j} + \gamma(z_{N-1,j} - z_{N,j}) + k_d \gamma(z_{1,j} - z_{N,j}), \quad (3)$$

где $z_{1,j}$ и $z_{N,j}$, $\forall j = 1 \dots N$ соответствуют значениям переменной z на левой и правой границах среды соответственно. Согласно [5], такая конфигурация пространства позволяет при определенных условиях наблюдать возникновение автономного ведущего центра.

Уравнения модели (1)–(3) интегрировались численно с шагом пространственной сетки $h = 0.025$. При этом значения параметров системы были заданы как $A = 0.5$, $B = 1.1$, $\tau_l = 1.0$, $\varepsilon_z = 1.0$, $\alpha_z = 1.1$, $\varepsilon_v = 0.004$, $\gamma = 7.5 \cdot 10^{-4}$, $v_s = 0.05$. В качестве управляющего параметра использовалась величина k_d, определяющая конфигурацию пространства. В предельном случае, когда $k_d = 1$, левая и правая границы оказываются связанными, и между ними возможен диффузионный перенос вещества. В случае, когда $k_d = 0$, границы оказываются разомкнутыми. В промежуточных случаях $0 < k_d < 1$ является поправкой к коэффициенту диффузии, описывающей перенос вещества между левой и правой гранями.

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования динамики системы для предельных случаев $k_d = 1$ (рис. 1, a) и $k_d = 0$ (рис. 1, b) в виде „моментального снимка“ распределений концентрации вещества $z(x, y)$ в межклеточном пространстве. Видно, что в случае, когда $k_d = 1$ (граница области замкнута), в системе наблюдается регулярная структура, состоящая из волн возбуждения, распространяющихся в одном направлении с одинаковыми скоростями. В случае, когда коэффициент k_d становится равным нулю (что соответствует разомкнутой границе), в системе возникает нерегулярная динамика, которой соответствует наличие пространственной области хаотической динамики (ведущего центра),

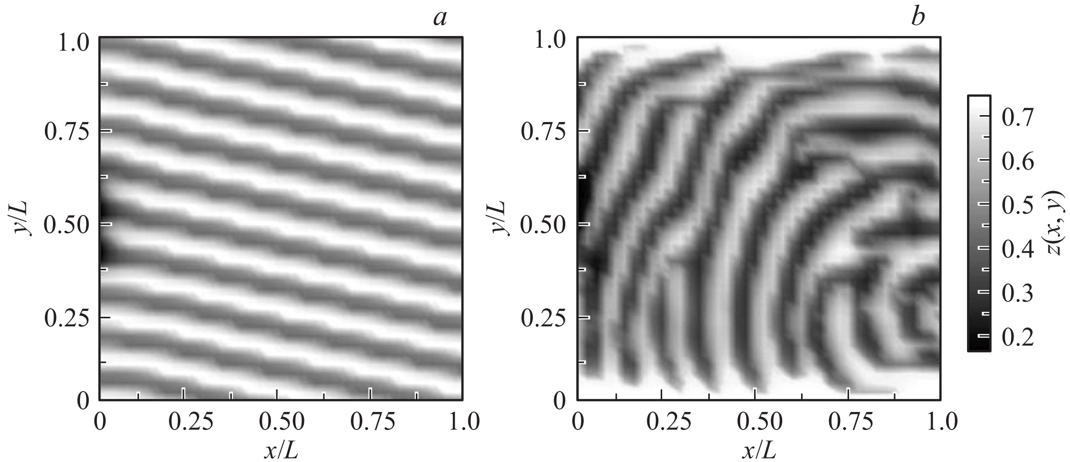

Рис. 1. Моментальные распределения концентрации вещества $z(x, y)$ в межклеточном пространстве, построенные для предельных случаев: a — $k_d = 1$ (граница замкнута), b — $k_d = 0$ (граница разомкнута).

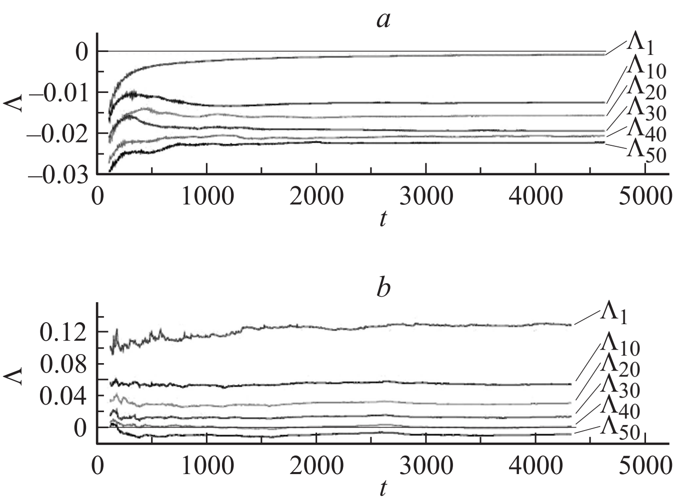

Рис. 2. Зависимости от времени значений нескольких старших показателей Ляпунова для предельных случаев $k_d = 1$ (a) и $k_d = 0$ (b).

порождающего набор волн, распространяющихся в разные стороны. Очевидно, что монотонное изменение параметра k_d от единицы до нуля обеспечивает переход от периодической динамики к хаотической.

Для количественной характеристики эволюции пространственно-временной динамики в настоящей работе был рассчитан спектр показателей Ляпунова и отслеживались его изменения при варьировании коэффициента k_d. Известно, что показатели Ляпунова являются мощным инструментом для анализа эволюции динамических режимов в системах различной природы. Однако при рассмотрении пространственно-распределенных систем, характеризуемых бесконечномерным фазовым пространством, при расчете спектра показателей Ляпунова возникают сложности, связанные с корректным определением состояния рассматриваемой системы и построением набора возмущений [7]. В случае исследуемой в настоящей работе системы задача также осложняется тем, что, наряду с уравнением в частных производных (2), динамика популяции нейронов описывалась при помощи набора ОДУ (1). Для преодоления указанной трудности была разработана модификация методики, предложенная нами ранее для распределенных систем [8,9], а именно, опорное состояние исследуемой системы было задано как

$$U(x, y, t) = \left(v_{\overline{1,N}}(x, y, t), w_{\overline{1,N}}(x, y, t), z(x, y, t)\right)^T,$$

$$v_{\overline{1,N}}(x, y, t) = v_{\overline{1,N}}(t),$$

$$w_{\overline{1,N}}(x, y, t) = w_{\overline{1,N}}(t), \ \forall x, \ y \in r. \tag{4}$$

На рис. 2 приведены зависимости от времени ляпуновских сумм, нормированных на длину временного ряда, для предельных случаев $k_d = 1$ (рис. $2, a$) и $k_d = 0$ (рис. $2, b$), соответствующих режимам периодической и хаотической динамики, продемонстрированных на рис. 1. Видно, что по истечении интервала времени $T = 4000$ безразмерных единиц вычисляемое значение показателя Ляпунова становится практически стационарным и не зависит более от времени и числа итераций процедуры Грамма–Шмидта. При этом режим регулярной пространственно-временной динамики (рис. $1, a$), которому соответствуют периодические колебания величины $z(x, y)$ (рис. $1, a$), характеризуется наличием нулевого старшего показателя Ляпунова. В то же самое время из рис. $2, b$ видно, что для динамического режима, характеризующегося образованием ведущего центра (рис. $1, b$), существует набор из $N_\Lambda = 39$ старших положительных показателей Ляпунова (рис. $2, b$). С точки зрения показателей Ляпунова данный режим может быть рассмотрен как гиперхаотический, при этом большое число положительных показателей в спектре обусловливается бесконечномерным фазовым пространством рассматриваемой системы.

Для исследования сценария перехода от периодической динамики к гиперхаотической в работе были рассчитаны зависимости пятидесяти [1] старших показателей Ляпунова от значения управляющего параметра k_d (рис. 3). Из приведенной зависимости видно, что в случае, когда $0.58 < k_d < 1.0$, в системе реализуется периодический режим, которому соответствует нулевое значение старшего показателя Ляпунова, а при $0 > k_d > 0.26$ — хаотический, характеризующийся наличием

[1] С учетом бесконечномерного фазового пространства исследуемой системы гиперхаотические режимы могут характеризоваться большим ($N \sim 40$) количеством положительных показателей Ляпунова.

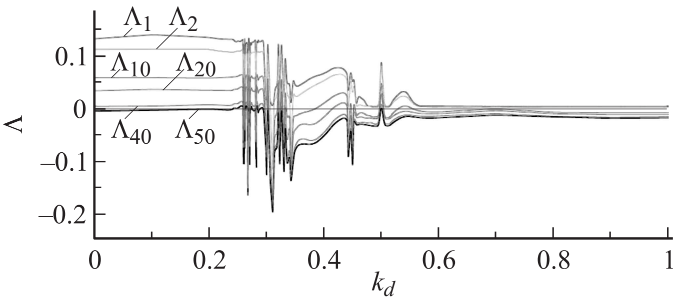

Рис. 3. Значения старших показателей Ляпунова, рассчитанные для различных значений коэффициента k_d .

$N_\Lambda = 39$ старших положительных показателей. Следует отметить, что при варьировании значения параметра k_d в данных диапазонах усложнения динамики не наблюдается, и в системе реализуются типичные пространственно-временные структуры, приведенные ранее на рис. 1. В то же самое время, при изменении значения управляющего параметра в диапазоне $0.26 < k_d < 0.58$, в системе происходят множественные переходы между регулярными и нерегулярными волновыми режимами.

Подводя итоги, нами был обнаружен и количественно охарактеризован переход между различными типами волновых структур в обобщенной модели нейронной среды. Как было установлено, изменение типа граничных условий в удаленной от ведущего центра (источника волн) области способно кардинальным образом влиять на результирующую пространственно-временную динамику. Применение специальной модификации алгоритма расчета спектра ляпуновских экспонент для случая дискретно-непрерывной активной среды позволило количественно охарактеризовать эволюцию наблюдаемых волновых режимов, и исследовать ее детали. Сообщаемые в данной статье результаты открывают как минимум два перспективных направления дальнейших исследований, одно из которых связано с анализом механизмов генерации самоподдерживающихся структур и автоволн в таких системах, а другое — с дальнейшим развитием методов применения спектра показателей Ляпунова для дискретно-непрерывных активных сред.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 14-12-00224). Д.Э. Постнов благодарит Министерство образования и науки РФ (проект 3.1586.2017/ПЧ) за поддержку, воплощенную в части разработки и верификации использованной математической модели. А.Е. Храмов и В.А. Максименко благодарят Министерство образования и науки РФ (проекты 3.861.2017/ПЧ и 3.4593.2017/ВУ) за поддержку, реализованную в части анализа и выделения пространственных паттернов.

Список литературы

[1] *Charles A.C., Baca S.M.* // Nat. Rev. Neurol. 2013. V. 9. P. 637.
[2] *Tfelt-Hansen P.C.* // Cephalalgia. 2010. V. 30. P. 780.
[3] *Heiss W.D.* // Ann. NY Acad. Sci. 2012. V. 1268. P. 26.
[4] *Postnov D.E.* et al. // Brain Research. 2012. V. 1434. P. 200.
[5] *Postnov D.E.* et al. // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. P. 031921.
[6] *Postnov D.E.* et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2010. V. 187. P. 241.
[7] *Купцов П.В.* // Известия вузов. ПНД. 2011. Т. 18. № 5. С. 93.
[8] *Hramov A.E.* et al. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. P. 082302.
[9] *Короновский А.А.* и др. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 13. С. 40.