РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2014, том 59, № 12, с. 1230–1241

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

УДК 517.9

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ОДНОНАПРАВЛЕНО И ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ПОТОКАХ: МЕТОД ФАЗОВЫХ ТРУБОК

© 2014 г. А. А. Короновский[1, 2], О. И. Москаленко[1, 2], А. Е. Храмов[1, 2], С. А. Шурыгина[1]

[1]*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,*
Российская Федерация, 410012, Саратов ул. Астраханская, 83
e-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru, shrs@nonlin.sgu.ru
[2]*Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,*
Российская Федерация, 410054 Саратов ул. Политехническая, 77

Поступила в редакцию 28.01.2013 г.

Скорректирована и дополнена концепция обобщенной синхронизации в потоковых системах и дискретных отображениях. Строго показано, что при установлении режима обобщенной синхронизации векторы состояний взаимодействующих систем следует рассматривать как связанные функционалом, а не функциональным соотношением, как это принято традиционно. Предложен подход, основанный на рассмотрении трубок траекторий в фазовом пространстве, для определения порога возникновения обобщенной синхронизации и изучения данного типа синхронного поведения в системах с дискретным и непрерывным временем. Сделан вывод, что концепция слабой и сильной обобщенной синхронизации также должна быть пересмотрена.

DOI: 10.7868/S0033849414100052

ВВЕДЕНИЕ

Хаотическая синхронизация нелинейных динамических систем является универсальным явлением, имеющим большое фундаментальное и практическое значение [1–3]. Синхронизация может наблюдаться не только в радиофизических и физических, но и в физиологических, биологических, химических, социальных и других системах. В настоящее время выделяют достаточно большое число различных типов синхронного поведения хаотических осцилляторов. Одним из наиболее интересных из них является режим обобщенной хаотической синхронизации (ОХС) [4].

Режим обобщенной синхронизации традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов или дискретных отображений и означает, что между состояниями этих систем после завершения переходного процесса устанавливается некоторое функциональное соотношение [4]. Вид этого функционального соотношения может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальной. По виду функционального соотношения – гладкое или фрактальное – в работе [5] было предложено выделять соответственно сильную или слабую обобщенную синхронизацию. Режим сильной синхронизации соответствует гладкой зависимости координат ведущей и ведомой систем, в то время как в случае слабой обобщенной синхронизации наблюдается фрактальная зависимость. В последнем случае в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства, а диагностика синхронного режима проводится, как правило, при помощи метода вспомогательной системы [6].

Особо следует отметить, что установление функционального соотношения в режиме ОХС может быть строго доказано для двух однонаправленно связанных осцилляторов с непрерывным временем [7], тогда как в случае взаимной связи это доказательство оказывается неприменимым, и, соответственно, вопрос о существовании функциональной зависимости между векторам состояний систем в подобном случае остается открытым, а сам факт существования этой зависимости – неочевидным. Ситуация усложняется еще более в случае систем с дискретным временем. Поскольку обратимые отображения связаны с потоковыми системами с помощью процедуры сечения Пуанкаре [8], то доказательство существования функционального отношения между векторами состояний взаимодействующих систем может быть распространено только на однонаправленно связанные обратимые отображения, тогда как для необратимых отображений и отображений с взаимной связью существование подобной функциональной зависимости отнюдь не очевидно. Тем не менее в ряде работ режим ОХС иногда необоснованно трактуется как наличие функционального соотношения.

Для диагностики режима ОХС помимо метода вспомогательной системы используются также метод ближайших соседей [4, 9] и метод расчета спектра ляпуновских экспонент [10]. Оба этих метода могут быть применены к анализу ОХС в системах с взаимным типом связи [11], однако диагностика ОХС в таких системах при помощи метода вспомогательной системы приводит к некорректным результатам [12].

В данной работе проводится пересмотр и уточнение существующей концепции ОХС. Как будет показано ниже, и в потоковых системах, и в дискретных отображениях состояния взаимодействующих систем в режиме ОХС следует рассматривать связанными друг с другом функционалом, а не функциональным соотношением.

1. ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Для объяснения необходимости пересмотра и уточнения концепции ОХС параллельно рассмотрим динамику двух однонаправлено связанных потоковых систем и дискретных отображений.

Эволюция состояний взаимодействующих потоковых систем определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathbf{H}(\vec{x},\vec{g}_x),\\ \dot{\vec{y}} &= \mathbf{G}(\vec{y},\vec{g}_y) + \sigma\mathbf{P}(\vec{x},\vec{y}),\end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\vec{y} = \vec{y}(t)$ – векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ – операторы эволюции, определяющие векторные поля рассматриваемых систем, $\vec{g}_x$ и $\vec{g}_y$ – векторы параметров, функция $\mathbf{P}$ отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр σ определяет силу связи между ними.

Для отображений подобная эволюция векторов состояний ведущей $\vec{x}_n$ и ведомой $\vec{y}_n$ систем перепишется в виде

$$\begin{aligned}\vec{x}_{n+1} &= \mathbf{H}(\vec{x}_n,\vec{g}_x),\\ \vec{y}_{n+1} &= \mathbf{G}(\vec{y}_n,\vec{g}_y) + \sigma\mathbf{P}(\vec{x}_n,\vec{y}_n).\end{aligned} \tag{2}$$

Далее без потери общности будем предполагать, что размерности взаимодействующих систем $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются одинаковыми и равными m.

Как уже упоминалось выше, для рассматриваемого случая однонаправленной связи режим ОХС означает наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем. Это соотношение для однонаправленно связанных потоковых систем [4, 5] имеет вид

$$\vec{y}(t) = \mathbf{F}[\vec{x}(t)], \tag{3}$$

а для дискретных отображений –

$$\vec{y}_n = \mathbf{F}[\vec{x}_n]. \tag{4}$$

В связи с тем, что между состояниями взаимодействующих систем (3) и (4), существует функциональная зависимость, в режиме ОХС ближайшие соседи должны быть не только близкими, но и подчиняться линеаризованному соотношению, которое может быть получено из (3) и (4), если существующее функциональное соотношение $\mathbf{F}[\cdot]$ является непрерывно дифференцируемым.

Выберем произвольно в ведущей системе опорную точку $\vec{x}_0$ ($\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ для потоков, $\vec{x}_0 = \vec{x}_N$ для отображений), которой будет соответствовать точка $\vec{y}_0 = \vec{y}(t_0)$ $[\vec{y}_0 = \vec{y}_N]$[1] в ведомой системе. Пусть $\vec{x}_J = \vec{x}(t_J)$ $[\vec{x}_J = \vec{x}_{n_J}]$ – точка в ведущей системе, близкая к опорной $\vec{x}_0$, такая, что $|\vec{x}_J - \vec{x}_0| < \varepsilon$, тогда $\vec{y}_J = \vec{y}(t_J)$ $[\vec{y}_J = \vec{y}_{n_J}]$ – соответствующая ей точка в ведомой системе. Обозначим векторы отклонения фазовой точки в ведущей системе от опорной точки $\vec{x}_0$, а в ведомой системе от опорной точки $\vec{y}_0$ соответственно через $\delta\vec{x}_J = \vec{x}_J - \vec{x}_0$; $\delta\vec{y}_J = \vec{y}_J - \vec{y}_0$ и с учетом (3) и (4) для режима ОХС запишем следующее:

$$\begin{aligned}\vec{y}_J &= \vec{y}_0 + \delta\vec{y}_J = \mathbf{F}[\vec{x}_J] =\\ &= \mathbf{F}[\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_J] \approx \mathbf{F}[\vec{x}_0] + \mathbf{JF}[\vec{x}_0]\delta\vec{x}_J,\end{aligned} \tag{5}$$

где $\mathbf{JF}[\vec{x}_0]$ – якобиан $\mathbf{F}[\cdot]$, вычисленный в точке $\vec{x}_0$, который для конечномерной динамической системы с размерностью фазового пространства m является m-мерной квадратной матрицей.

Наличие режима ОХС для рассматриваемых систем предполает выполнение соотношения

$$\vec{y}_0 = \mathbf{F}[\vec{x}_0], \tag{6}$$

а следовательно, соотношение (5) может быть записано в виде

$$\delta\vec{y}_J = \mathbf{A}\delta\vec{x}_J, \tag{7}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{JF}[\vec{x}_0]$ – квадратная матрица $m \times m$. Аналогичное соотношение в случае существования функционального соотношения между векторами состояний может быть получено и для случая взаимно связанных хаотических осцилляторов (при этом функциональное соотношение (3) может быть переписано в виде $\mathbf{F}[\vec{x}(t), \vec{y}(t)] = 0$, а соотношение (4) – в виде $\mathbf{F}[\vec{x}_n, \vec{y}_n] = 0$).

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что для двух хаотических осцилляторов или дискретных отображений, находящихся в режиме обобщенной снхронизации, при наличии дифференцируемого функционального отношения должно выполняться соотношение (7). Очевидно, что для каждой опорной точки $\vec{x}_0$ матрица $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ будет своя, при этом, конечно, явный вид

[1] В силу взаимосвязи потоковых систем и дискретных отображений здесь и далее будем проводить рассмотрение применительно к потоковым системам, указывая в квадратных скобках аналогичные величины и соотношения для дискретных отображений.

ее коэффициентов a_{ij} будет неизвестен. Тем не менее если для двух взаимодействующих систем с размерностью фазового пространства m для некоторой фиксированной опорной точки $\vec{x}_0$ известны $M > m$ ее ближайших соседей $\vec{x}_J$, а также соответствующие векторы $\vec{y}_0$ и $\vec{y}_J$, то выполнение соотношения (7) может быть проверено.

Действительно, проверив предварительно существование режима ОХС, например при помощи метода вспомогательной системы [6] или путем расчета ляпуновских экспонент [10], можно выбрать m ближайших соседей (из M существующих), при этом для каждого J-го состояния $\vec{x}_J$, $\vec{y}_J$ должно выполняться соотношение (7). Иными словами, эти m состояний дают m^2 линейных уравнений с m^2 неизвестными величинами (в роли которых выступают коэффициенты a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$). Тогда, решив эту систему линейных уравнений, можно определить значения коэффициентов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ и на оставшихся неиспользованными $(M - m)$-состояний проверить выполнение (7).

Очевидно, что решение рассматриваемой системы линейных уравнений всегда существует и всегда единственно, если только использованные для ее составления m состояний $\vec{x}_J$ не являются линейно зависимыми. Очевидно также, что при достаточно большом наборе состояний (M значительно превосходит m) выбрать m линейно независимых опорных состояний не составляет труда. Для того чтобы минимизировать ошибку, необходимо выбрать такие векторы $\vec{x}_J$ (и $\delta\vec{x}_J$ соответственно), для которых $|\det(\delta\mathbf{X})| = \max$, где $\delta\mathbf{X}$ – матрица, составленная из компонентов векторов $\delta\vec{x}_J$, соответствующих состояниям ведущей системы:

$$\delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta x_1^1 & \delta x_2^1 & \dots & \delta x_k^1 & \dots & \delta x_m^1 \\ \delta x_1^2 & \delta x_2^2 & \dots & \delta x_k^2 & \dots & \delta x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta x_1^J & \delta x_2^J & \dots & \delta x_k^J & \dots & \delta x_m^J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta x_1^m & \delta x_2^m & \dots & \delta x_k^m & \dots & \delta x_m^m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом, получаем, что при наличии достаточно длинных временных реализаций задача нахождения коэффициентов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ может быть решена всегда и, соответственно, также всегда может быть проверена корректность соотношения (7). Для этого необходимо вычислить векторы

$$\delta\vec{z}_J = \mathbf{A}\delta\vec{x}_J, \quad (9)$$

где $J = M - m, \dots, M$, и сравнить их с векторами $\delta\vec{y}_J$, полученными из временной реализации.

2. КОРРЕКТИРОВКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Из предыдущего раздела следует, что векторы состояний взаимодействующих систем, находящихся в режиме ОХС, при наличии дифференцируемого функционального отношения должны подчиняться соотношению (7), которое может быть проверено путем расчета векторов возмущений[2] $\delta\vec{z}_J$ (см. (9)) и сравнения их с векторами $\delta\vec{y}_J$. Однако, как будет показано ниже, при расчете конкретных систем оказывается, что вектора состояний взаимодействующих систем не совпадают с рассчитанными теоретически векторами, причем это несовпадение весьма существенно. Такие результаты свидетельствуют о том, что соотношение (9) для хаотических осцилляторов, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, не выполняется, что, в свою очередь, свидетельствует о том, что соотношения (3) и (4) также не выполняются либо $\mathbf{F}[\cdot]$ не является дифференцируемым функциональным отношением.

Из полученного результата следует, что общепринятая трактовка режима ОХС не работает (или, по крайней мере, работает не всегда и является неудобной), и это фактически приводит к необходимости пересмотра и уточнения самого определения режима ОХС. Важно отметить, что и особенность метода ближайших соседей, в силу которой этот метод не позволяет точно определить границу возникновения режима ОХС (в отличие от метода вспомогательной системы или расчета старшего условного показателя Ляпунова), также связана с тем, что соотношения (3) и (4) выполняются далеко не всегда.

Однако нельзя утверждать, что понятие обобщенной хаотической синхронизации введено ошибочно, поскольку в настоящее время существует очень большое число работ, в которых, по сути, разработана стройная и непротиворечивая теория этого явления. В частности, синхронизм связанных хаотических осцилляторов подтверждается с помощью концепции синхронизации временных масштабов [13, 14], отлично диагностируется с помощью метода вспомогательной системы [6], расчета показателей Ляпунова [10], механизм его возникновения объясняется с помощью метода модифицированной системы [15, 16] и т.п. Да и само общепринятое определение явления ОХС в форме (3) или (4) в ряде случаев оказывается справедливым (подробнее см. далее). Из этого следует, что необходимо не радикальное из-

[2] Разумеется, можно сравнивать друг с другом не векторы возмущений $\delta\vec{z}_J$ и $\delta\vec{y}_J$, а непосредственно векторы состояний $\vec{y}_0 + \delta\vec{z}_J$ и $\vec{y}_0 + \delta\vec{y}_J$.

менение общепринятого определения ОХС, а его пересмотр и корректировка.

Корректировка определения ОХС заключается в том, что состояние ведомой системы $\vec{y}(t)$ в момент времени t (состояние $\vec{y}_n$ в момент дискретного времени n для отображений) определяется не только состоянием ведущей системы $\vec{x}(t)$ $[\vec{x}_n]$ в этот же момент времени, но и всей предысторией этого состояния на протяжении интервала времени длительностью τ (или K – дискретной длины предыстории). Иными словами, $\mathbf{F}[\cdot]$ в соотношениях (3) и (4) должно рассматриваться не как функциональная зависимость, а как функционал в случае потоковых систем и зависимость, зависящая от K предыдущих состояний, в случае дискретных отображений.

Действительно, согласно концепции ОХС синхронный режим означает, что под влиянием ведущей системы $\vec{x}(t)$ $[\vec{x}_n]$ ведомая система $\vec{y}(t)$ $[\vec{y}_n]$ приходит в состояние, однозначно определяемое ведущей системой, при этом этот процесс "сходимости" определяется величиной старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_r^1 < 0$. Иными словами, за определенный интервал времени τ $[K]$ ведущая система вынуждает ведомую систему прийти в состояние, которое не зависит от начальных условий – именно на этом основано применение метода вспомогательной системы. Если изображающие точки в ведомой и вспомогательной системе различны, то расстояние между ними будет уменьшаться с течением времени по следующему закону:

$$l(t) \cong l(0)\exp(\lambda_1^r t), \quad [l_{n+1} \cong l_0\exp(\lambda_1^r n)]. \tag{10}$$

Таким образом, можно говорить о том, что на состояние ведомой системы в момент времени t $[n]$ влияет некоторая предыстория поведения ведомой системы, длительность которой обратно пропорциональна величине старшего условного показателя Ляпунова:

$$\tau \sim 1/\left|\lambda_1^r\right| \quad \left[K \sim 1/\left|\lambda_1^r\right|\right]. \tag{11}$$

Очевидно, что соотношение (5), полученное в предположении, что $\mathbf{F}[\cdot]$ является дифференцируемой функцией, в этом случае выполняться не будет. То есть можно записать, что для потоковых систем –

$$\vec{y}(t) = \mathbf{F}[\vec{x}(s)], \quad t-\tau < s \le t; \tag{12}$$

и аналогично для дискретных отображений –

$$\vec{y}_n = \mathbf{F}[\vec{x}_n, \vec{x}_{n-1}, \ldots, \vec{x}_{n-K}]. \tag{13}$$

Рассмотрим малые отклонения $\delta\vec{x}(s)$ $[\delta\vec{x}_k]$ и $\delta\vec{y}(s)$ $[\delta\vec{y}_k]$, которые остаются малыми на интервале времени $t_0-\tau \le s \le t_0$ $[N-K \le k \le N]$. Тогда с учетом сказанного выше соотношение (7) для потоковых систем примет вид

$$\delta\vec{y}(t_0) = \int_{t_0-\tau}^{t_0} \mathbf{JF}[\vec{x}(s)]\delta\vec{x}(s)ds \tag{14}$$

и для дискретных отображений –

$$\delta\vec{y}_N = \sum_{k=N-K}^{N} J_{\vec{x}_k}\mathbf{F}[\vec{x}_{N-K}, \ldots, \vec{x}_N]\delta\vec{x}_k, \tag{15}$$

где $J_{\vec{x}_k}$ – якобиан преобразования для переменной $\vec{x}_k$ $(k = N-K, \ldots, N)$. В силу малости отклонений $\delta\vec{x}(s)$ $[\delta\vec{x}_k]$ от опорной траектории $\vec{x}(s)$ $[\vec{x}_k]$ в рамках линейного приближения можно записать:

$$\delta\vec{x}(s) = \mathbf{B}(s)\delta\vec{x}(t_0), \quad t_0-\tau < s \le t_0 \tag{16}$$

($\mathbf{B}(s)$ – неизвестная матрица с коэффициентами, зависящими от времени, $\mathbf{B}(t_0) = \mathbf{E}$) и, соответственно,

$$\delta\vec{x}_k = \mathbf{B}_k\delta\vec{x}_N \tag{17}$$

($\mathbf{B}_k$ – неизвестная матрица[3], аналогичная $\mathbf{B}(s)$ для потоковых систем). Тогда для потоковых систем имеем

$$\delta\vec{y}(t_0) = \int_{t_0-\tau}^{t_0} J\mathbf{F}[\vec{x}(s)]\mathbf{B}(s)\delta\vec{x}(t_0)ds, \tag{18}$$

и для дискретных отображений –

$$\delta\vec{y}_N = \sum_{k=N-K}^{N} J_{\mathbf{x}_k}\mathbf{F}[\vec{x}_{N-K}, \ldots, \vec{x}_N]\mathbf{B}_k\delta\vec{x}_N, \tag{19}$$

и, как следствие, для потоковых систем имеем

$$\delta\vec{y}(t_0) = \mathbf{C}(t_0)\delta\vec{x}(t_0), \tag{20}$$

где $\mathbf{C}(t_0)$ – квадратная $(m \times m)$-матрица, определяемая как

$$\mathbf{C}(t_0) = \int_{t_0-\tau}^{t_0} J\mathbf{F}[\vec{x}(s)]\mathbf{B}(s)ds; \tag{21}$$

а для дискретных отображений –

$$\delta\vec{y}_N = \mathbf{C}_N\delta\vec{x}_N, \tag{22}$$

где $\mathbf{C}_N$ – аналогичная матрица размерности $(m \times m)$, определяемая как

$$\mathbf{C}_N = \sum_{k=N-K}^{N} J_{\mathbf{x}_k}\mathbf{F}[\vec{x}_{N-K}, \ldots, \vec{x}_N]\mathbf{B}_k. \tag{23}$$

Нетрудно заметить, что соотношения (20) и (22) аналогичны друг другу. Более того, оба выражения формально совпадают с полученным ранее соотношением (7) с точностью до переобозначе-

[3] Кроме $\mathbf{B}_N = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

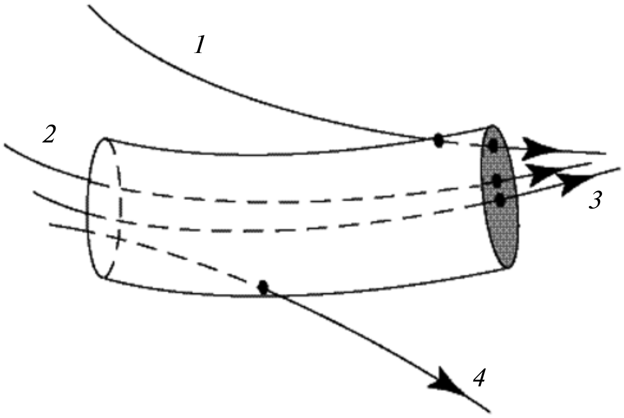

Рис. 1. Фазовая трубка и фазовые траектории ведущей системы. Опорные траектории *3* и *1* являются близкими в рассматриваемый момент времени t (показан серым), но с различной "предысторией". Траектории *2* и *3* удовлетворяют условию близости и имеют сходную "предысторию". Траектория *4* не является близкой к траекториям *1–3* в момент времени t.

ний $\delta\vec{y}_J = \delta\vec{y}(t_0)$, $\mathbf{A} = \mathbf{C}(t_0)$, $\delta\vec{x}_J = \delta\vec{x}(t_0)$ для потоковых систем и $\delta\vec{y}_J = \delta\vec{y}_N$, $\mathbf{A} = \mathbf{C}_N$, $\delta\vec{x}_J = \delta\vec{x}_N$ для отображений, что делает возможным анализ установления обобщенной синхронизации с помощью расчета векторов возмущений $\delta\vec{z}_J = \mathbf{C}\delta\vec{x}_J$ (см. раздел 1) и сравнения их с векторами $\delta\vec{y}_J$. Однако соотношение (7) было выведено в предположении, что близкими являются векторы $\vec{x}_0$ и $\vec{x}_J$, в то время как при выводе (20) и (22) были наложены более жесткие условия малости отклонения рассматриваемых фазовых траекторий на интервале времени $t_0 - \tau < s < t_0$ $[k = N - K,\dots N]$.

Для количественной характеристики степени близости этих векторов друг к другу для каждой пары векторов $\delta\vec{y}_J$ и $\delta\vec{z}_J$ рассмотрим величину

$$\Delta_J = \|\delta\vec{y}_J - \delta\vec{z}_J\| / \|\delta\vec{y}_J\| \tag{24}$$

и будем анализировать ее распределение.

Хаотические колебания характеризуются тем, что в фазовом пространстве наблюдается как сходимость фазовых траекторий по одним направлениям, так и расхождение по другим. Поэтому у двух близких точек в фазовом пространстве ведущей системы могут достаточно сильно различаться "предыстории", если соответствующие фазовые траектории в фазовом пространстве ведомой системы различны. Подобная ситуация проиллюстрирована на рис. 1. Как видно из рисунка, точки, соответствующие опорной траектории *3* и траектории *1*, являются близкими, однако "предыстория" у них различна, условие малости отклонения $\delta\vec{x}_J$ на интервале времени длительностью τ [дискретной длине предыстории K] не выполняется и, как следствие, для этих точек соотношения (20) и (22) оказываются неприменимыми. В то же время траектории *2* и *3* удовлетворяют условию близости и, соответственно, ожидается, что в данном случае соотношения (20) или (22) можно использовать.

Для характеристики близости фазовых траекторий введем понятие фазовой трубки. С учетом сказанного выше выражение, описывающее фазовую трубку, для потоковых систем запишем в виде

$$\mathrm{T}_\tau = \{\vec{x} : |\vec{x}_0(s) - \vec{x}| < \varepsilon, \quad s \in [t_0 - \tau; t_0]\} \tag{25}$$

(ε – малая величина), а для дискретных отображений – в виде

$$\mathrm{T}_K = \{\vec{x} : |\vec{x}_k - \vec{x}| < \varepsilon, \quad k = N - K,\dots N\}. \tag{26}$$

Оба выражения учитывают только те векторы, чьи фазовые траектории проходят через трубку, аналогично траектории *2* на рис. 1. Таким образом, для анализа режима ОХС в исследуемой системе необходимо учитывать только те векторы, фазовые траектории которых проходят через трубку длиной τ $[K]$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ТРУБОК К АНАЛИЗУ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ В РЕЖИМЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Для проверки корректности приведенных рассуждений, проанализируем поведение конкретных однонаправленно и взаимно связанных динамических систем (с непрерывным и дискретным временем) при помощи метода фазовых трубок. Рассмотрим сначала потоковые динамические системы.

А. Потоковые системы

Пример 1. Рассмотрим два однонаправленно связанных осциллятора Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \quad \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \quad \dot{y}_r = \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \quad \dot{z}_r = p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{27}$$

где $\vec{x} = (x_d, y_d, z_d)^T$ $[\vec{y} = (x_r, y_r, z_r)^T]$ – декартовы координаты ведущего [ведомого] осциллятора, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_r = 0.95$, $\omega_d = 0.99$ – управляющие параметры, значения которых выбраны по аналогии с работами [15, 17], σ – параметр связи. При указанных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации, диагностируемый при помощи метода вспомогательной системы и расчета показателей Ляпунова, возникает при $\sigma_{GS} \approx 0.11$.

Выберем значение параметра связи $\sigma = 0.3$ (в этом случае диагностируется режим обобщенной синхронизации, но синхронизация с запаздыванием еще не наблюдается) и исследуем поведение

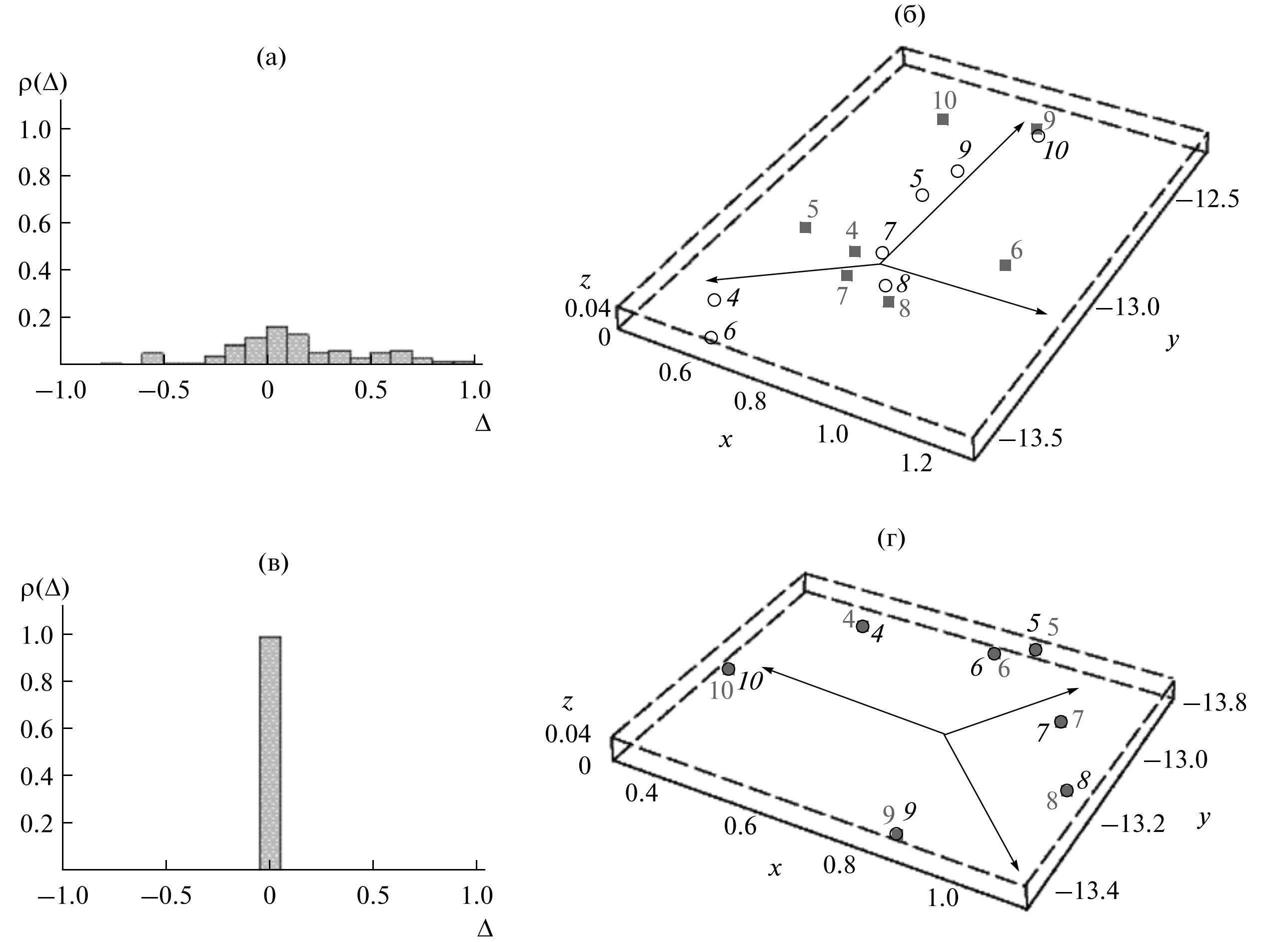

Рис. 2. Гистограммы нормированной разности (24) (а, в) и соответствующие им векторы $\vec{y}_J$ (темные квадраты 4–10) и $\vec{z}_J$ (светлые кружочки *4–10*) (б, г), вычисленные для системы Ресслера (27) при $\sigma = 0.3$ для всех ближайших соседей (а, б) и для точек, прошедших через трубку длиной $\tau = 100$ (в, г).

системы (27) при помощи метода фазовых трубок (рис. 2). На рисунке представлены гистограммы распределения нормированной разности между векторами $\delta\vec{y}_J$ и $\delta\vec{z}_J$ (24) (рис. 2а, 2в) и сами векторы $\vec{y}_J$ и $\vec{z}_J$ (рис. 2б, 2г) для случаев, когда используются все ближайшие соседи (рис. 2а, 2б) и только точки, прошедшие через фазовую трубку длиной $\tau = 100$ (рис. 2в, 2г) (в обоих случаях $\varepsilon = 0.5$). Из рисунка видно, что полученные гистограммы радикально отличаются для двух рассмотренных случаев: для точек, прошедших через трубку, гистограмма представляет собой δ-функцию, в то время как в случае, когда используются все ближайшие соседи, распределение близко к гауссову. В последнем случае вектора возмущений $\vec{z}_J$ и $\vec{y}_J$ достаточно сильно отличаются друг от друга (см. рис. 2б), в то время как вычисленные вектора возмущений $\vec{z}_J$ для точек, прошедших через трубку, находятся в хорошем соответствии с векторами $\vec{y}_J$, что удовлетворяет как условию (20), так и предположению о необходимости принятия во внимание предыстории. Для потоковых систем это, в частности, означает, что $\mathbf{F}[\cdot]$ следует рассматривать как функционал.

С ростом силы связи между взаимодействующими осцилляторами абсолютное значение старшей условной ляпуновской экспоненты $\left|\lambda_1^r\right|$ растет, а временной интервал τ (длина фазовой трубки $\mathrm{T}_\tau(t_0)$), наоборот, уменьшается, и при приближении к границе полной синхронизации значение τ стремится к нулю. Следовательно, в режиме полной синхронизации уравнению (7) удовлетворяют все соседние векторы x_J без дополнительных условий близости фазовых траекторий. Таким образом, можно сказать, что векторы состояния хаотических систем в режиме ОХС соотносятся друг с другом как функционал, в то время как в режиме полной синхронизации эти векторы следует рассматривать связанными функциональным соотношением.

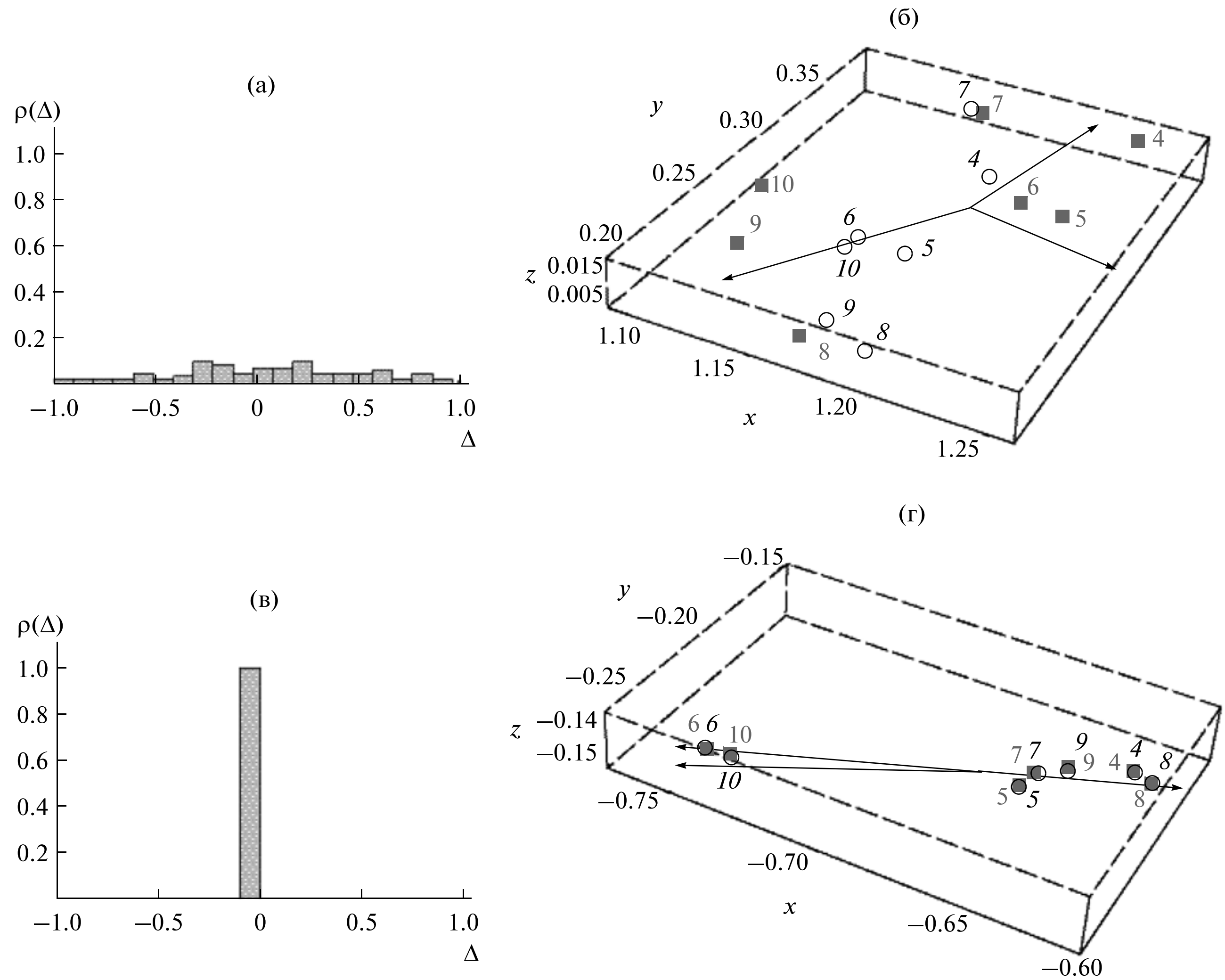

Рис. 3. Гистограммы нормированной разности (24) (*а*, *с*) и соответствующие им векторы $\vec{y}_J$ (темные квадраты 4–10) и $\vec{z}_J$ (светлые кружочки *4–10*) (б, г), вычисленные для генераторов на туннельном диоде (28) при $\sigma = 0.15$ для всех ближайших соседей (а, б) и для точек, прошедших через трубку длиной $\tau = 110$ (в, г).

Пример 2. Рассмотрим систему двух взаимосвязанных генераторов на туннельном диоде [18, 19], описываемых в безразмерном виде следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \omega_{1,2}^2[h(x_{1,2} - \sigma(y_{2,1} - y_{1,2})) + y_{1,2} - z_{1,2}], \\ \dot{y}_{1,2} &= -x_{1,2} + \sigma(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \mu\dot{z}_{1,2} &= x_{1,2} - f(z_{1,2}), \end{aligned} \quad (28)$$

где $f(\xi) = -\xi + 0.002\mathrm{sh}(5\xi - 7.5) + 2.9$ – безразмерная характеристика нелинейного элемента, $h = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\omega_1 = 1.09$, $\omega_2 = 1.02$ – управляющие параметры, σ – параметр связи. Индексы “1” и “2” соответствуют первому и второму связанным генераторам. При таком наборе значений управляющих параметров режим обобщенной синхронизации, определенный по моменту перехода второй старшей ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений [11, 12], возникает при $\sigma_{GS} \approx 0.08$.

По аналогии с системамиРесслера, рассмотренными выше, зафиксируем значение параметра связи $\sigma = 0.15$ и исследуем поведение системы (28) при помощи метода фазовых трубок. На рис. 3 также представлены гистограммы нормализованной разности между векторами $\vec{z}_J$ и $\vec{y}_J$ (а, в) и сами эти векторы (б, г) (величина ε, характеризующая фазовую трубку, также будет $\varepsilon = 0.5$). Рис. 3а, 3б соответствует случаю, когда используются все ближайшие соседи, а на рис. 3в, 3г показаны только те векторы, фазовые траектории которых прошли через фазовую трубку длиной $\tau = 110$. Видно, что в первом случае векторы $\vec{z}_J$ и $\vec{y}_J$ значительно отличаются друг от друга, а распределение нормированных разностей близко к равномерному. Во втором же случае векторы возмущения $\vec{z}_J$ практически совпадают с векторами второй системы $\vec{y}_J$, а гистограмма представляет собой δ-функцию. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, полученными для однонаправленно связанных осцилляторовРесслера. Поэтому можно утверждать, что во взаимно связанных потоковых системах, так же как и в системах с однонаправленной связью, векторы состояний взаимодействующих систем следует рассматривать связанными друг с другом функционалом.

Б. Системы с дискретным временем

Пример 1. Рассмотрим два однонаправленно связанных логистических отображения:

$$\begin{gathered} x_{n+1} = f(x_n, a_x), \\ y_{n+1} = f(y_n, a_y) + \sigma(f(x_n, a_x) - f(y_n, a_y)), \end{gathered} \tag{29}$$

где $f(x,a) = ax(1-x)$, $a_x = 3.75$, $a_y = 3.79$ – управляющие параметры ведущей и ведомой систем соответственно, σ – параметр связи [5, 20]. Из-за одномерного характера рассматриваемых отображений векторы, представленные в разделе 2, должны быть заменены на скаляры, при этом все теоретические и аналитические закономерности останутся справедливыми.

Порог возникновения режима ОХС определялся с помощью расчета условной ляпуновской экспоненты для системы (29) и уточнялся при помощи метода вспомогательной системы [6]. На рис. 4а приведена зависимость условного показателя Ляпунова λ от параметра связи σ. Видно, что условная ляпуновская экспонента отрицательна для $\sigma \in [0.12; 0.18]$ и $\sigma \geq 0.265$, что свидетельствует о наличии ОХС в указанных диапазонах значений. При этом ОХС близка к полной (сильной) синхронизации при достаточно больших значениях параметра $\sigma \geq 0.265$, в то время как для $\sigma \in [0.12; 0.18]$ диагностируемый режим соответствует так называемой слабой ОХС. Понятно, что для режима сильной синхронизации нет необходимости учитывать предысторию, так как состояния взаимодействующих систем соотносятся друг с другом простым функциональным соотношением $y_n \approx x_n$ [5]. В то же время случай слабой синхронизации ($\sigma \in [0.12; 0.18]$) требует дополнительных исследований.

Далее без потери общности выберем параметр связи $\sigma = 0.14$, что соответствует минимальному отрицательного значению условной ляпуновской экспоненты (на рис. 4а это значение отмечено стрелкой). Приняв значение точности в выражении (26) равным $\varepsilon = 0.01$, проанализируем влияние длины предыстории K на значения δz_J и распределения нормированной разности (24). При этом опорную точку x_N будем выбирать случайно. Очевидно, что когда соотношение (22) выполняется, так же как и в случае потоковых систем, распределение нормированных разностей Δ_J является δ-функцией.

На рис. 4б, 4г, 4е приведены гистограммы нормированных разностей Δ_J при различных значениях длины предыстории K. На рис. 4в, 4д, 4ж показаны также плоскости (x, y), характеризующие состояния ведущей и ведомой систем для выбранных значений управляющих параметров. Видно, что зависимость координат ведомой системы от координат ведущей системы имеет фрактальный (негладкий) характер, что подтверждает предположение о том, что диагностируемый режим ОХС является слабым. На каждом из этих рисунков отмечены также точки (x_J, y_J), удовлетворяющие условию (26) для выбранной длины предыстории. На рис. 4б, 4в представлен случай, когда учитываются все ближайшие соседи (предыстория не принимается во внимание, $K = 0$), что соответствует традиционной концепции ОХС. В этом случае значения нормированной разности Δ_J распределены практически равномерно по всему интервалу [0; 1] (см. рис. 4б), а все точки в фазовом пространстве ведомой системы также распределены случайным образом в широком диапазоне значений переменной y (см. рис. 4в). Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что уравнение (9) в данном случае не выполняется.

С ростом длины предыстории распределение нормированных разностей трансформируется и, например, при $K = 10$ содержит несколько четко выраженных пиков, возникающих из-за неоднородности хаотического аттрактора (см. рис. 4г). Однако и в этом случае точки y_J в фазовом пространстве ведомой системы оказываются по-прежнему распределенными в широком диапазоне изменения переменной y (см. рис. 4д). На рис. 4е, 4ж приведены аналогичные распределения для оптимальной длины предыстории ($K = 28$). Видно, что в данном случае распределение нормированных разностей представляет собой δ-функцию (см. рис. 4е). В этом случае все состояния системы (x_J, y_J), удовлетворяющие условию (22), оказываются сосредоточенными в малой окрестности опорной точки (x_N, y_N) (см. рис. 4ж). При этом вся "фрактальность" исчезает, а соотношение между состояниями ведущей и ведомой систем становится гладким, как в и случае сильной синхронизации.

Таким образом, для корректного рассмотрения векторов состояний двух однонаправленно связанных логистических отображений в общем случае необходимо учитывать предысторию состояния систем, что аналогично результатам, полученным для систем с непрерывным временем.

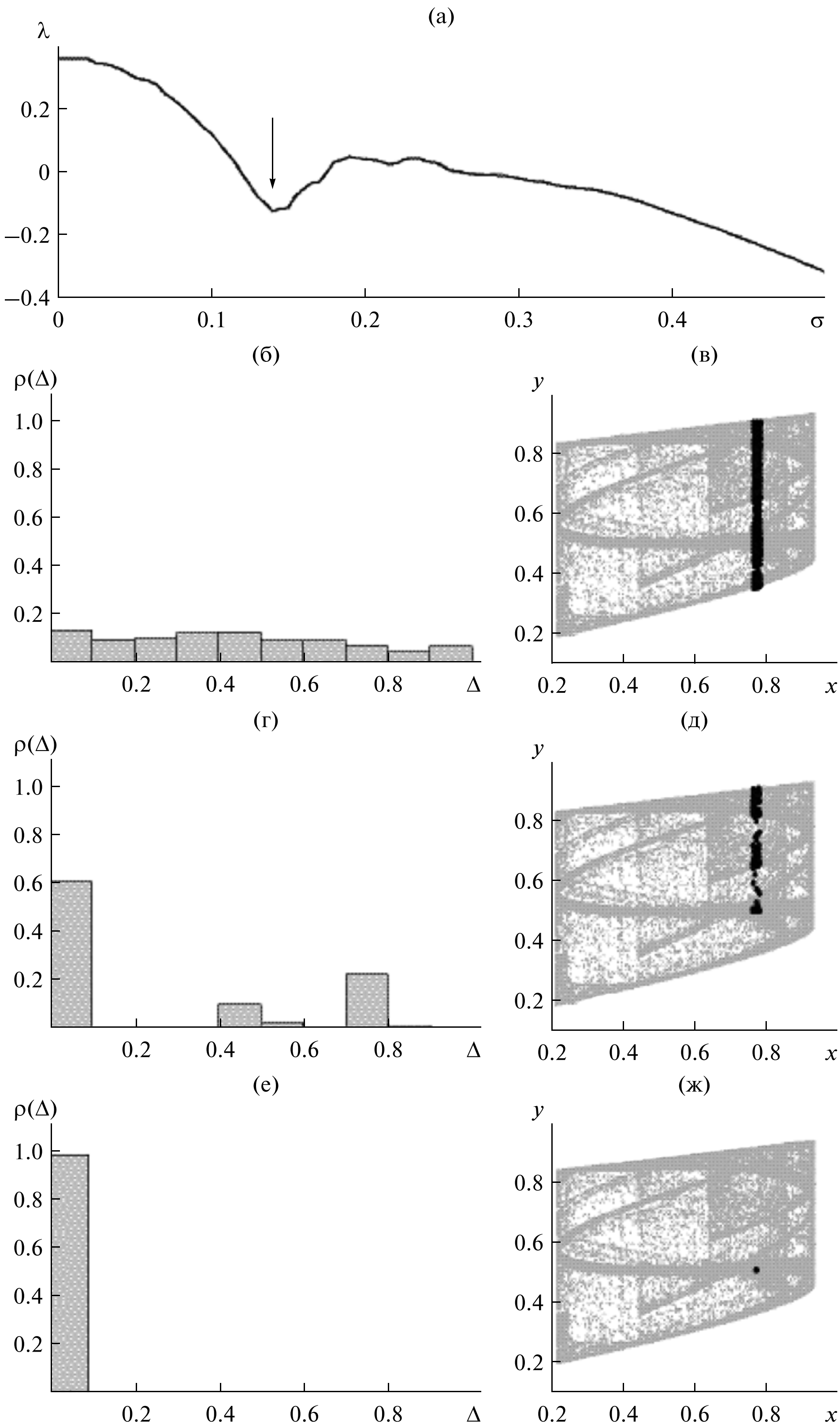

Рис. 4. Зависимость условной ляпуновской экспоненты λ от параметра связи σ (а); гистограммы нормированной разности Δ (б, г, е) и плоскости (x, y) (в, д, ж) для двух однонаправленно связанных логистических отображений (29), находящихся в режиме обобщенной синхронизации (стрелкой отмечено значение $\sigma = 0.14$) для различной длины предыстории: $K = 0$ (б, в), 10 (г, д), 28 (е, ж), а также состояния взаимодействующих систем, удовлетворяющих условию (26) (в, д, ж).

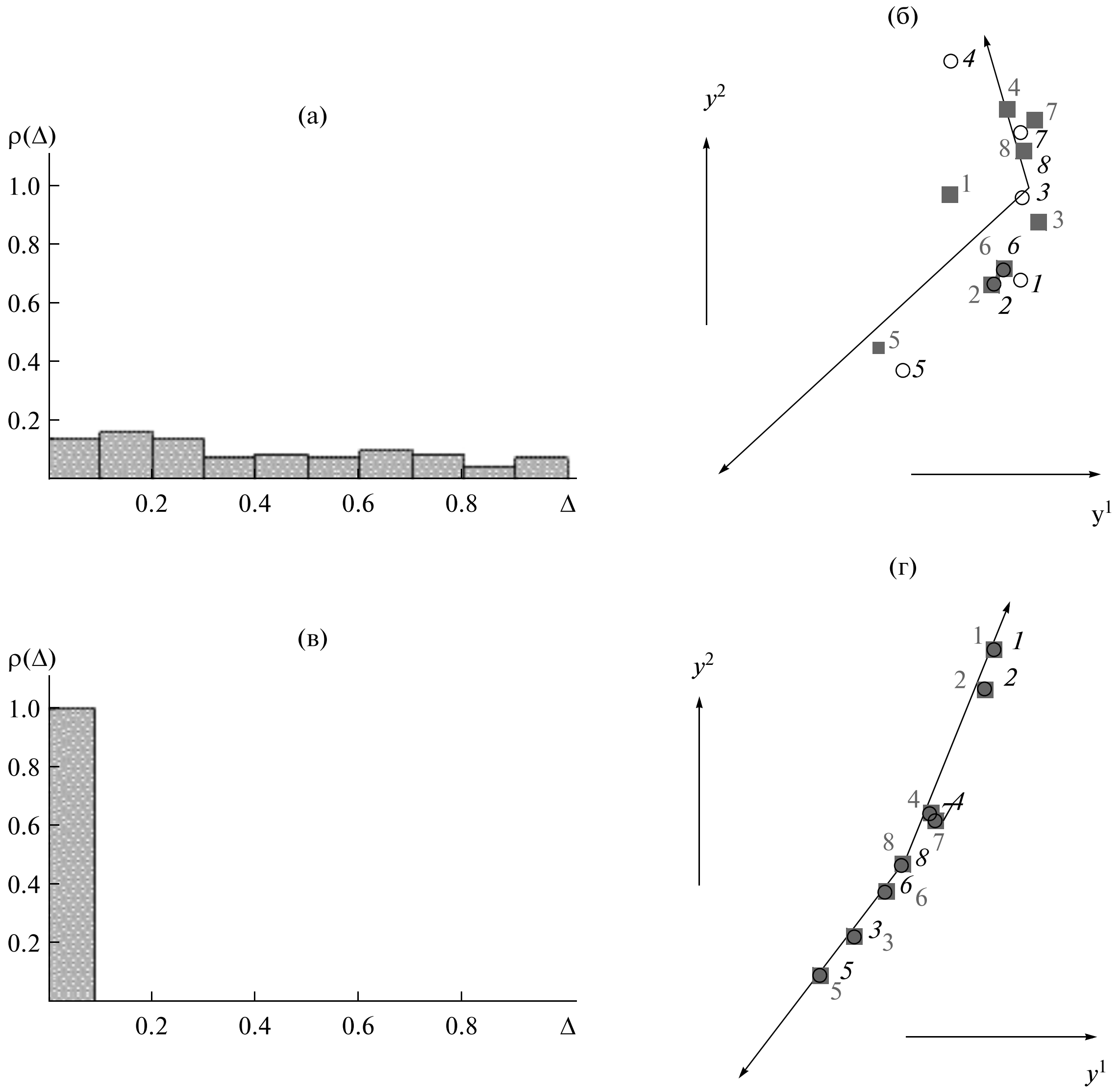

Рис. 5. Гистограммы нормированной разности Δ (*а*, *с*) и векторы $\vec{y}_J$ (темные квадраты *1–8*) и $\vec{z}_J$ (светлые кружочки *1–8*) (б, г) второго отображения Эно (30) при $\sigma = 0.2$ для различной длины предыстории: $K = 0$ (а, б) и 40 (в, г).

Пример 2. Рассмотрим два взаимно связанных отображения Эно:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, x_n^2, a_x) + \sigma(f(y_n^1, y_n^2, a_y) - f(x_n^1, x_n^2, a_x)),\\
x_{n+1}^2 &= bx_n^1,\\
y_{n+1}^1 &= f(y_n^1, y_n^2, a_y) + \sigma(f(x_n^1, x_n^2, a_x) - f(y_n^1, y_n^2, a_y)),\\
y_{n+1}^2 &= by_n^1,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где $\vec{x} = (x^1, x^2)$ $[\vec{y} = (y^1, y^2)]$ – векторы состояний первой [второй] системы, $f(x_1, x_2, a) = ax_1(1 - x_1) + x_2$ – нелинейная функция, $a_x = 3.16779$, $a_y = 2.9$, $b = 0.3$ – управляющие параметры, σ – параметр связи [10, 21]. Для выбранных значений управляющих параметров обобщенная синхронизация, определенная по моменту перехода одной из двух положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений [11, 12], возникает при $\sigma \approx 0.035$.

Далее зафиксируем значение параметра связи $\sigma = 0.2$ и проведем исследования, аналогичные описанным выше, для системы (30). Для $\sigma = 2$ в исследуемой системе имеет место слабая ОХС. Как и в рассмотренных выше случаях, степень близости векторов $\vec{y}_J$ и $\vec{z}_J$ будем характеризовать при помощи построения распределений нормированных разностей (24), а также анализа расположения векторов $\vec{y}_J$ и $\vec{z}_J$ на плоскости (y^1, y^2). На рис. 5 приведены распределения нормированных разностей Δ_J и сами векторы $\vec{y}_J$ и $\vec{z}_J$ для двух различных случаев. В первом случае (рис. 5а, 5б) используются все ближайшие соседи (предыстория не учитывается, $K = 0$), во втором случае (рис. 5в, 5г) учитывается предыстория длиной $K = 40$. Величина ε в соотношении (26) в обоих случаях выбрана равной 0.01. Видно, что в первом случае значения нормированной разности Δ_J распределены практически равномерно по единичному интервалу (как и для логистических отображений, рассмотренных выше), а векторы $\vec{y}_J$ и $\vec{z}_J$ значительно отличаются друг от друга, что свидетельствует об отсутствии гладкого функционального соотношения между состояниями взаимодействующих отображений Эно. Однако для второго случая, когда учитывается предыстория, распределение Δ_J представляет собой δ-функцию, а рассчитанные векторы $\vec{z}_J$ находятся в хорошем соответствии с векторами второй системы $\vec{y}_J$, что подтверждает корректность теоретических рассуждений, представленных в разделе 2.

Таким образом, можно сделать вывод, что и в двумерных отображениях, связанных взаимно, при рассмотрении связи между векторами состояний исследуемых систем предыстория поведения этих отображений должна быть принята во внимание.

4. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

В заключение обсудим существующую концепцию сильной и слабой ОХС более детально (см., например, [5], а также раздел 3Б). Как отмечалось во Введении, согласно традиционному подходу разделение обобщенной синхронизации на сильную и слабую обусловлено свойствами функционального соотношения, устанавливаемого между состояниями взаимодействующих систем. При относительно малых значениях силы связи между системами функциональное соотношение **F** является фрактальным, а следовательно, имеет место слабая синхронизация[4]. Если же интенсивность связи достаточно велика, функциональное соотношение становится гладким, что имеет место в случаях полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием, представляющими собой сильные формы обобщенной синхронизации. Указанные утверждения [14] основаны на расчете корреляционной размерности (и других характеристик) аттракторов в фазовом пространстве $D \oplus R$ (D и R – фазовые пространства ведущего и ведомого осцилляторов соответственно)[5].

[4] Как уже отмечалось, это строго доказано для однонаправлено связанных потоковых систем и обратимых отображений, связанных также однонаправлено.

[5] Считается, что для фрактального отображения **F** размерность странного аттрактора во всем фазовом пространстве $D \oplus R$ оказывается больше размерности аттрактора ведущего системы в пространстве D, в то время как для гладкого отображения **F** эти размерности должны совпадать.

Действительно, если рассмотреть аттрактор двух связанных логистических отображений в пространстве $D \oplus R$ (см., например, рис. 4в), нетрудно заметить его фрактальные свойства. В то же время наблюдаемая фрактальность является артефактом, появление которого обусловлено предположением о существовании простого функционального соотношения (4) между состояниями взаимодействующих систем без учета их предыстории. Для учета предыстории в фазовом пространстве $D \oplus R$ нужно рассматривать только те векторы $\vec{y}_J$, которые удовлетворяют условию (26) (условию (25) для потоковых систем) (см. рис. 4ж). Нетрудно заметить, что в этом случае все состояния систем (x_J, y_J) оказываются сосредоточенными в малой окрестности опорной точки (x_N, y_N), при этом вся фрактальность исчезает и соотношение **F** между состояниями взаимодействующих систем оказывается гладким. Аналогичный вывод можно сделать не только для логистических отображений (29), но и для других потоковых систем и дискретных отображений.

Таким образом, необходимо использовать уточненную концепцию сильной и слабой ОХС. Это уточнение заключается в том, что в режиме слабой ОХС состояние второй системы $\vec{y}(t)$ $[\vec{y}_n]$ зависит не только от состояния первой системы $\vec{x}(t)$ $[\vec{x}_n]$ в тот же момент времени, но и от предыстории этого состояния длительностью τ $[K]$. Иными словами, в режиме слабой синхронизации состояния взаимодействующих систем оказываются связанными между собой соотношением (12) [(13)]. С ростом параметра связи длина предыстории уменьшается и при некотором значении параметра связи становится равной 0, что соответствует установлению режима полной синхронизации. В этом случае состояния взаимодействующих систем оказываются связанными между собой функциональным соотношением (3) [(4)], а диагностируемый режим соответствует сильной форме обобщенной синхронизации.

Следовательно, разделение ОХС на сильную и слабую формы является вполне оправданным. В то же время различие между ними обусловлено не типом соотношения **F**, устанавливаемого между состояниями взаимодействующих систем (является оно гладким или фрактальным), оно оказывается гладким в обоих случаях. Однако в режиме сильной синхронизации состояния взаимодействующих систем оказываются связанными между собой функциональным соотношением (3) [(4)], в то время как в режиме слабой синхронизации необходимо учитывать также предысторию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование ОХС в однонаправленно и взаимно связанных потоковых системах и дискретных отображениях. Показано, что существующая концепция ОХС этих систем нуждается в корректировке и уточнении, так как их состояния в общем случае оказываются связанными между собой функционалом. Предложен подход для анализа обобщенной синхронизации в таких системах. Полученные результаты проиллюстрированы на примере однонаправленно связанных системРесслера и генераторов на туннельном диоде, связанных взаимно, а также однонаправленно связанных логистических отображений и взаимно связанных отображений Эно.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что разделение обобщенной синхронизации на слабую и сильную также нуждается в пересмотре и уточнении: в режиме сильной синхронизации состояния взаимодействующих систем оказываются связанными друг с другом при помощи функционального соотношения, в то время как при анализе слабой синхронизации необходимо учитывать предысторию поведения систем. При этом в случае как сильной, так и слабой синхронизации соотношение, устанавливаемое между состояниями взаимодействующих систем, является гладким, а так называемая “фрактальность” исчезает при корректном учете предыстории.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 2014/202 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, СГТУ-141 и СГТУ-146), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-02-00221-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glass L.* // Nature. 2001. V. 410. № 6825. P. 277.
2. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al.* // Phys. Reports. 2002. V. 366. № 1–2. P. 1.
3. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281.
4. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
5. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
6. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
7. *Kocarev L., Parlitz U.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1816.
8. *Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. Т. 82. № 3. С. 176.
9. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115.
10. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
11. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A.* // Proc. 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES-2010). Dresden 26–28 May 2010. Dresden: Univ. of Technology. 2010. P. 70.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Максименко В.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. № 13. С. 40.
13. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. № 23. С. 54.
14. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206. № 3–4. P. 252.
15. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.
16. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 2. С. 1.
17. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. V. 72. № 6. P. 901.
18. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // IEEE Trans. 1997. V. CSI-44. № 10. P. 874.
19. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 1. С. 21.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. № 5–6. P. 423.
21. *Pyragas K.* // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 1998. № 3. P. 101.