

ЦИФРОВАЯ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ: ВЛИЯНИЕ ПОРОГОВОГО УРОВНЯ И ВЫБОРА ВЕЙВЛЕТА

© 2016 г. А. С. Ясин^{1,2}, А. Н. Павлов^{1,3,4}, А. Е. Храмов^{1,3,4}

¹Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Российская Федерация, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

²Технологический университет,

Республика Ирак, Багдад, ул. Аль-Сина

³Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

Российская Федерация, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

⁴Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

Российская Федерация, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

E-mail: pavlov_lesha@mail.ru

Поступила в редакцию 07.07.2014 г.

Рассмотрена задача цифровой вейвлет-фильтрации зашумленных данных. Проведен сравнительный анализ результатов при различном задании пороговой функции для коэффициентов вейвлет-преобразования. Изучено влияние выбора вейвлет-базиса на эффективность устранения помех. Показано, что минимальная ошибка фильтрации в большинстве случаев обеспечивается при задании “мягкого” варианта введения пороговой функции.

DOI: 10.7868/S0033849416010149

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая фильтрация зашумленных сигналов и изображений важна при решении широкого круга научно-технических задач. Такие задачи возникают, в частности, в технике связи для улучшения качества приема передаваемых сообщений. В последние годы для их решения все чаще применяются подходы, основанные на дискретном вейвлет-преобразовании (ДВП) [1–3]. Эти подходы имеют преимущества по сравнению с фильтрами, основанными на преобразовании Фурье, поскольку они позволяют эффективно устранять локализованные помехи, фильтрация которых с применением фурье-преобразования неэффективна из-за использования базиса бесконечно осциллирующих функций. Широко применяемое в рамках многомасштабного анализа ДВП позволяет разложить сигнал или изображение на составляющие, соответствующие разным масштабам наблюдения. После этого могут быть внесены коррективы в коэффициенты разложения, соответствующие малым масштабам, которые в наибольшей степени подвержены влиянию шума [4]. В простейшем случае используется обнуление соответствующих коэффициентов по аналогии с записью графических данных в формате JPEG2000, который также использует разложение по вейвлетам и “отбрасывание” части наи-

менее информативных вейвлет-коэффициентов, если необходимо провести сжатие изображения с незначительной потерей качества. Таким образом, достигается одновременный эффект сжатия изображения и фильтрации помех, присутствующих на малых масштабах.

При этом следует отметить, что простой вариант обнуления части коэффициентов не всегда оказывается эффективным, поэтому к настоящему времени предложены подходы, применяющие варианты “жесткого” и “мягкого” введения пороговой функции при проведении цифровой фильтрации [4–7]. В первом случае проводится обнуление вейвлет-коэффициентов, не превышающих заданный пороговый уровень, что приводит к появлению разрывов пороговой функции и нарушению регулярности восстановленного сигнала. Во втором случае пороговая функция не имеет разрывов, и корректировка значений проводится для всех вейвлет-коэффициентов. Дополнительно могут применяться различные модернизации методов разложения по вейвлетам, среди которых следует выделить метод дуального разложения с применением комплексного вейвлет-преобразования (*dual-tree complex wavelet-transform*) [8, 9]. Этот подход является расширением классического ДВП, использующего вещественные базисные функции, такие как вейвлеты Добеши. Он имеет

аналогию с методом аналитического сигнала, предусматривающим дополнение вещественного сигнала мнимой частью.

Несмотря на развитие приемов цифровой фильтрации, в которых используется вейвлет-преобразование, при практическом применении данных методов остается много нерешенных вопросов, а выбор конкретного способа фильтрации — по-прежнему сложная задача. В связи с этим сохраняет свою актуальность сравнительный анализ различных приемов фильтрации в целях выбора подхода, позволяющего минимизировать искажения, вносимые при восстановлении сигнала или изображения по его вейвлет-коэффициентам. В данной работе мы обсудим, как выбор вейвлет-базиса и пороговой функции в пространстве вейвлет-коэффициентов влияют на качество цифровой фильтрации. С этой целью нами проведен ряд тестовых исследований, предусматривающих добавление шума в изображение и его последующую фильтрацию. Такой подход позволяет определить ошибку цифровой фильтрации внесенных помех и решить задачу минимизации данной ошибки за счет настройки параметров алгоритма.

1. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОМЕХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДВП

Математический аппарат дискретного вейвлет-преобразования широко применяется в технике, в том числе при передаче и кодировании информации, когда нужно быстро провести вычисления. Он имеет ряд отличий от непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) [10–14], которое часто используется для анализа структуры сигналов систем с меняющимися во времени характеристиками [15–20]. Во-первых, ДВП обычно оперирует с ортонормированным базисом, обеспечивающим возможность более компактного представления сигнала. Это обстоятельство позволяет ограничиться меньшим числом коэффициентов разложения по сравнению с НВП. Кроме того, ДВП предусматривает более быструю схему проведения вычислений на основе пирамидального алгоритма разложения сигнала. Во-вторых, применение дискретных вейвлетов не сводится к обычной дискретизации формул НВП. Эти два варианта вейвлет-преобразования используют различные базисы. Если в случае НВП базис строится на основе функций, имеющих аналитическую форму записи (например, производных функции Гаусса), то в рамках ДВП применяются функции, не имеющие аналитического выражения, и задаваемые с помощью набора чисел (коэффициентов фильтра), что приводит к необходимости оперировать с матрицами. В данной работе мы используем в качестве базисных функций семейство вейвлетов Добеши [1]. Приведем пример набора коэффициентов фильтра, с помощью которого

задается широко применяемый на практике вейвлет Добеши D^8

$$\begin{aligned} h_0 &= -0.0757657, & h_1 &= -0.0296355, \\ h_2 &= 0.4976187, & h_3 &= 0.8037388, \\ h_4 &= 0.2978578, & h_5 &= -0.0992195, \\ h_6 &= -0.0126040, & h_7 &= 0.0322231. \end{aligned} \quad (1)$$

В ходе реализации ДВП сигнал подается на вход двух сопряженных квадратурных зеркальных фильтров. Для проведения разложения по пирамидальному алгоритму необходимо, чтобы объем выборки был задан в виде степени числа 2, т.е. $N = 2^k$. Если временной ряд $x(i) = x(i\Delta t)$ поступает на вход НЧ-фильтра с частотной характеристикой $g(i)$, то на выходе фильтра будет получен отфильтрованный сигнал

$$y(i) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)g(i-l). \quad (2)$$

Сопряженный ВЧ-фильтр с частотной характеристикой $h(i)$ связан с НЧ-фильтром следующим образом

$$g(i) = (-1)^i h(2M - i - 1), \quad (3)$$

где M — длина области задания вейвлета. Сигналы, подвергнутые фильтрации, далее прореживают, оставляя только нечетные или четные отсчеты, что соответствует схеме субполосного кодирования [2, 12]. В результате получаются две последовательности отсчетов:

$$y_{\text{НЧ}}(i) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)g(2i-l), \quad y_{\text{ВЧ}}(i) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)h(2i-l). \quad (4)$$

Возможность прореживания обеспечивается тем, что при применении зеркальных фильтров диапазон частот сигнала уменьшается в два раза. Прореженные сигналы вновь поступают на вход фильтров, что приводит к последовательному уменьшению вдвое ширины полосы частот. Схематично процедура ДВП представлена на рис. 1.

В результате прореживания каждый из временных рядов будет характеризоваться диапазоном частот, вдвое меньшим, чем у сигнала до фильтрации, однако наличие двух последовательностей (на выходе каждого из фильтров) позволяет однозначно восстановить исходный сигнал при обратном преобразовании.

Применение НЧ-фильтров можно интерпретировать как аппроксимацию сигнала на разных уровнях разрешения, а применение ВЧ-фильтров — как детализацию относительно выбранного уровня разрешения. Коэффициенты разложения по вейвлетам $d_{j,k}$ отражают амплитудные характеристики анализируемых процессов на разных уровнях разрешения. Для фильтрации помех небольшие

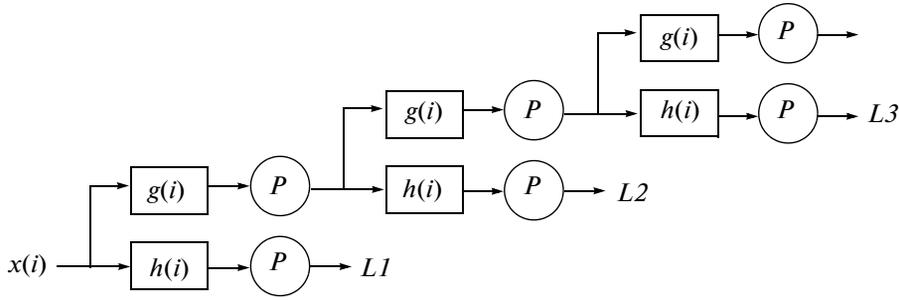


Рис. 1. Процедура ДВП, проводимого с помощью набора квадратурных зеркальных фильтров; P – процедура прореживания в 2 раза временного ряда, L – уровень разрешения.

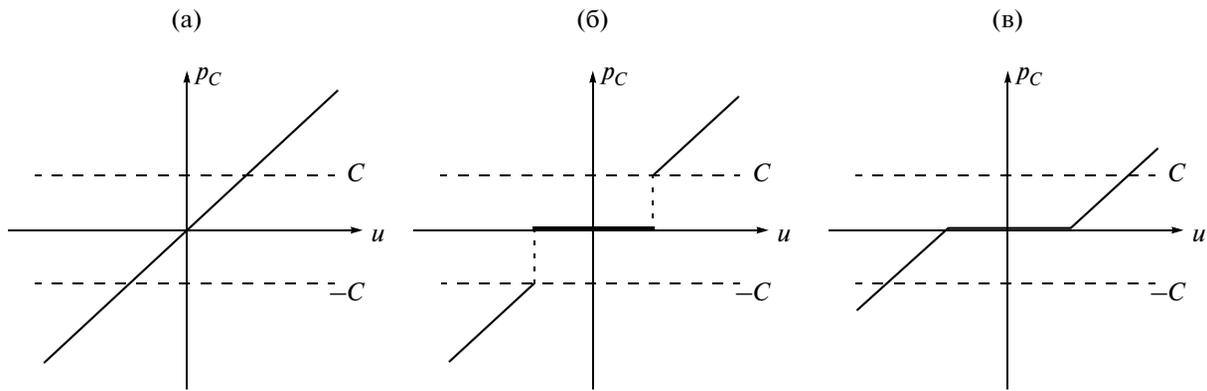


Рис. 2. Задание пороговой функции $p_C(u)$: а – исходный сигнал, б – “жесткий” вариант задания пороговой функции, в – “мягкий” вариант задания пороговой функции.

по абсолютной величине вейвлет-коэффициенты на малых масштабах (наиболее подверженные влиянию флуктуаций) отбрасывают перед проведением обратного преобразования (метод пороговой фильтрации). При этом качество фильтрации существенно зависит от выбора варианта задания пороговой функции [5–7], на которую умножаются соответствующие коэффициенты перед обратным преобразованием (“мягкий” или “жесткий”, рис. 2), и от вейвлет-базиса. Подходящий выбор способствует получению более высокого качества очистки сигнала или изображения от помех.

На рис. 2а–2в изображены три варианта задания пороговой функции $p_C(u)$ для коэффициентов вейвлет-преобразования. В варианте (а) выполняется равенство $p_C(u) = u$, которое означает отсутствие корректировок коэффициентов, и в результате обратного преобразования будет получен исходный сигнал. В варианте (б) функция задается в виде

$$p_C(u) = \begin{cases} u, & |u| \geq C, \\ 0, & |u| < C. \end{cases} \quad (5)$$

При использовании такой пороговой функции остаются неизменными большие по модулю (наиболее значимые) вейвлет-коэффициенты и обнуля-

ются малые. Наконец, для варианта (в) пороговая функция выбирается следующим образом:

$$p_C(u) = \begin{cases} u - C, & u \geq C, \\ u + C, & u \leq -C, \\ 0, & |u| \leq C. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что в последнем случае уменьшение абсолютных значений всех вейвлет-коэффициентов, включая большие по модулю, может привести к изменению амплитуды восстановленного сигнала. Для тех приложений, где важно сохранить неизменной амплитудные характеристики, такой подход неприменим, однако существуют задачи, где важнее сохранить регулярность сигнала, чем точно воспроизвести его амплитуду. Характерным примером служит фильтрация изображений от различных помех, где метод “мягкого” задания пороговой функции является широко используемым подходом.

Применительно к анализу изображений описанная процедура разложения по вейвлетам является более сложной, чем при анализе одномерных сигналов (временных рядов). В этом случае на двумерной плоскости проводится анализ изображения по горизонталям, вертикалям и диагоналям с одинаковым разрешением, а соответствующие фильтры

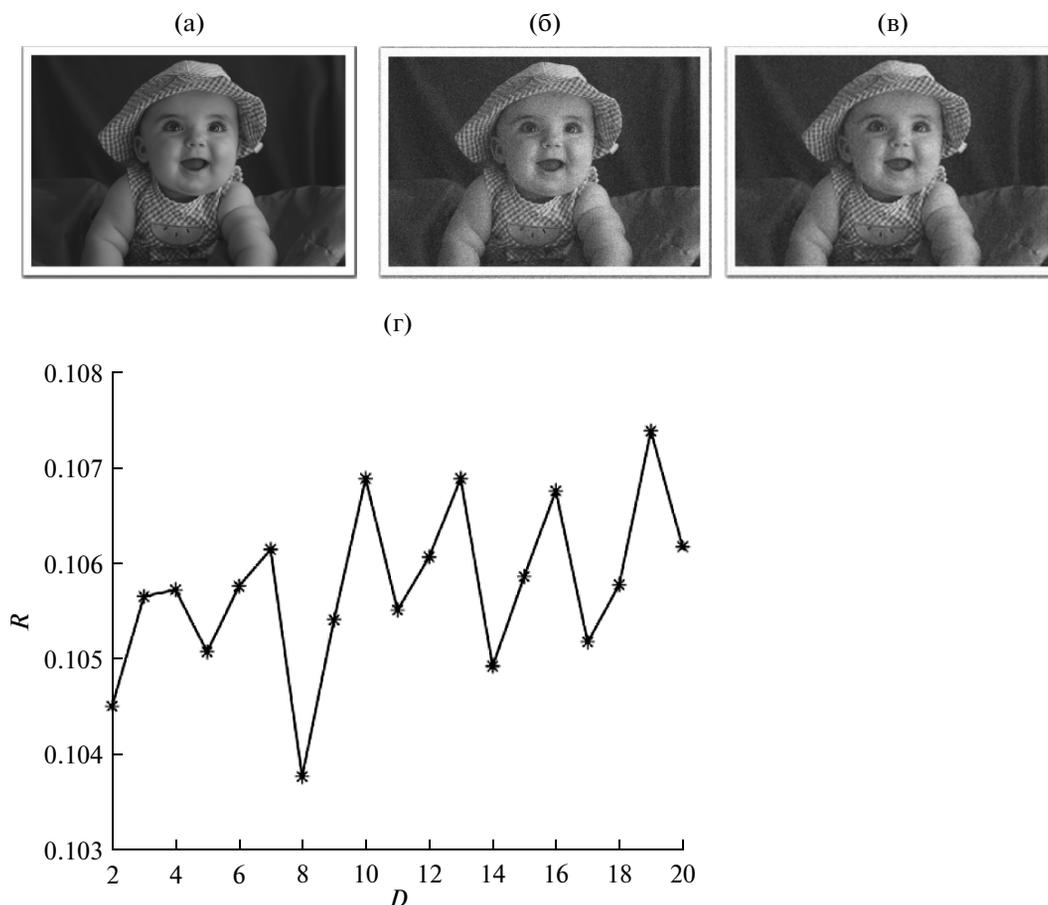


Рис. 3. Исходное (а), зашумленное (б) и отфильтрованное с применением вейвлета D^8 (в) изображение, а также зависимость ошибки R от выбора вейвлет-базиса (г).

формируются на основе произведений частотных характеристик НЧ- и ВЧ-фильтров для одномерного случая. Более детально данная процедура описана, например, в обзоре [21]. После разложения по вейвлетам для фильтрации помех проводится умножение коэффициентов на одну из пороговых функций (см. рис. 2) по аналогии со случаем одномерных сигналов.

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для иллюстрации эффективности метода вейвлет-фильтрации были проведены следующие исследования. К выбранному изображению добавлялся нормально распределенный случайный процесс (белый шум) с различной дисперсией. Далее проводилась фильтрация внесенных помех при задании различных вейвлет-базисов, методов введения порогового уровня и варьировании величины порога. Отфильтрованное изображение сравнивалось с исходным путем вычисления квадратного корня из величины среднеквадратич-

ной ошибки (R), и проводился поиск минимальной ошибки (наилучшего подавления помех).

На первом этапе было проведено исследование влияния выбора вейвлет-базиса. Было рассмотрено черно-белое изображение размером 560×800 (рис. 3а), и пять значений интенсивности белого шума (с дисперсией 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 и 0.5). При каждом значении интенсивности шума проводилось прямое ДВП в базе вейвлетов Добеши (от D^2 до D^{20}). Дополнительно аналогичные расчеты осуществлялись при изменении размера изображения (перемасштабировании с различными коэффициентами). Примеры зашумленного (дисперсия шума 0.1) и отфильтрованного с применением вейвлета (1) изображения приведены на рис. 3б, 3в, а характерная зависимость ошибки R от выбранного вейвлет-базиса представлена на рис. 3г. В данном примере вейвлет D^8 обеспечивал минимальную величину среднеквадратичной ошибки.

В целях проверки справедливости сделанных выводов, аналогичные расчеты были проведены для другого изображения (рис. 4). Несмотря на то, что минимум ошибки для вейвлета D^8 на рис. 4г менее

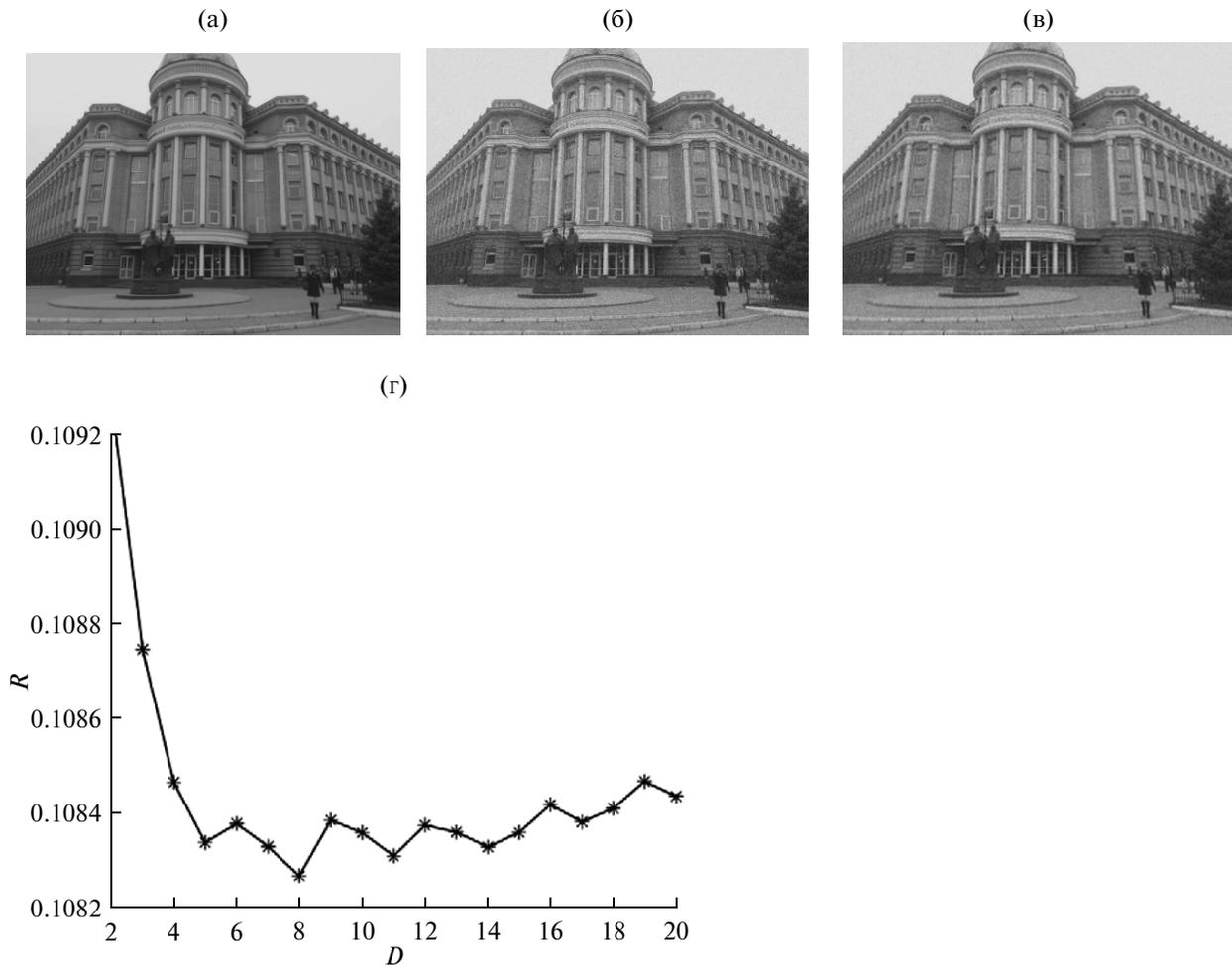


Рис. 4. Исходное (а), зашумленное (б) и отфильтрованное с применением вейвлета D^8 (в) изображение, а также зависимость ошибки R от выбора вейвлет-базиса (г).

выражен по сравнению с рис. 3г, однако и в данном случае выбор соответствующего базиса следует рассматривать как оптимальный.

В дальнейшем аналогичные расчеты были проведены для разных размеров изображений (перемасштабирование с коэффициентами от 0.5 до 1.5). Изменение размера приводило к тому, что минимум ошибки достигался для разных базисных функций. Однако во многих случаях соответствующий минимум был получен для вейвлета D^8 , который можно рассматривать как компромисс между длиной области задания и регулярности базисной функции. По этой причине именно этот вейвлет был использован в дальнейших расчетах.

На втором этапе проводилось изучение влияния способа задания пороговой функции и величины порога. На рис. 5 приведена зависимость ошибки R от величины порогового уровня C для “мягкого” и “жесткого” вариантов задания пороговой функции при дисперсии белого шума 0.1,

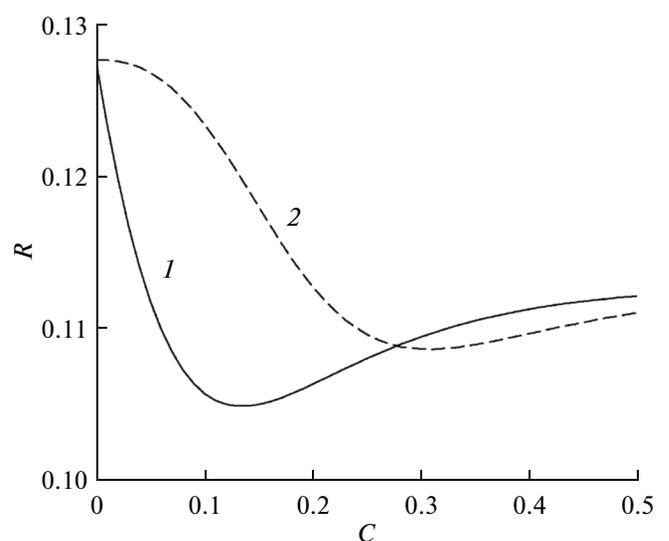


Рис. 5. Зависимость ошибки R от величины порогового уровня C для “мягкого” (1) и “жесткого” (2) вариантов задания пороговой функции $p_C(u)$.

Минимальные значения ошибки R и оптимальный пороговый уровень $C_{\text{опт}}$ для разных значений интенсивности шума и двух способов задания пороговой функции: “мягкого” и “жесткого”

| Дисперсия шума | $C_{\text{опт}}$ (“мягкий”) | R | $C_{\text{опт}}$ (“жесткий”) | R |
|----------------|-----------------------------|--------|------------------------------|--------|
| 0.1 | 0.134 | 0.1048 | 0.303 | 0.1085 |
| 0.2 | 0.13 | 0.1864 | 0.305 | 0.1884 |
| 0.3 | 0.118 | 0.2681 | 0.284 | 0.2695 |
| 0.4 | 0.1 | 0.3418 | 0.258 | 0.3429 |
| 0.5 | 0.083 | 0.4023 | 0.236 | 0.4031 |

добавленного к изображению, представленному на рис. 4а.

Как следует из рис. 5, минимальная ошибка достигается для “мягкого” варианта задания функции $p_C(u)$. Этот вариант обеспечивает уменьшение ошибки, наиболее выраженное при малых значениях уровня C . Если увеличивать интенсивность помех, добавляемых в изображение, то различия между двумя вариантами задания пороговой функции становятся менее выраженными (таблица). Тем не менее “мягкий” вариант задания функции $p_C(u)$ обеспечивает минимальную ошибку при всех значениях интенсивностей помех, и аналогичные выводы были сделаны как для разных изображений, так и в ходе подобных расчетов, проведенных при изменении размера изображений (перемасштабирования с коэффициентами от 0.5 до 1.5).

Таким образом, сравнительный анализ результатов вейвлет-фильтрации зашумленных изображений позволяет сделать вывод о преимуществе использования “мягкого” варианта задания пороговой функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была изучена проблема улучшения качества цифровой фильтрации помех на основе ДВП с применением различных вариантов задания пороговой функции и выбора вейвлет-базиса. Значительный интерес к данной проблеме и многочисленные исследования позволяют сделать вывод, что поиск путей оптимизации подавления помех, присутствующих в сигналах или изображениях, продолжает оставаться актуальной и важной задачей.

В соответствии с полученными результатами, вариант “мягкого” задания пороговой функции имеет несомненные преимущества, особенно при выборе малых значений порога C . Он обеспечивает снижение ошибки фильтрации на величину, достигающую 15...20% по сравнению с “жестким” вариантом задания пороговой функции. Отметим, что аналогичные выводы сделаны при анализе большого числа тестовых изображений с искусственно

добавленными помехами в целях получения количественных характеристик, свидетельствующих о качестве цифровой вейвлет-фильтрации.

Мы также рассмотрели влияние выбора базиса и изменения размера изображения на качество фильтрации. Перемасштабирование изображения влияет на величину ошибки фильтрации и приводит к тому, что минимум ошибки достигается для разных базисов. Тем не менее, во многих случаях данный минимум был получен для вейвлета Добеши D^8 , который может рассматриваться как компромисс между областью задания вейвлета (локализацией) и регулярностью базисной функции, позволяющей лучше сгладить ошибки при обратном преобразовании, вызванные отбрасыванием малых вейвлет-коэффициентов. Таким образом, вейвлет D^8 и “мягкий” вариант задания пороговой функции представляются предпочтительными при практической реализации методов цифровой вейвлет-фильтрации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00324).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
2. *Meyer Y.* Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia: SIAM, 1993.
3. *Meyer Y.* Wavelets and operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
4. *Jansen M.* Noise reduction by wavelet thresholding. New York: Springer-Verlag, 2001.
5. *Mallat S.G.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
6. *Donoho D.L.* // IEEE Trans. on Information Theory. 1995. V. 41. № 3. P. 613.
7. *Zhang H., Blackburn T.R., Phung B.T., Sen D.* // IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation. 2007. V. 14. № 1. P. 3.
8. *Kingsbury N.G.* // Philos. Trans. R. Soc. London A, Math. Phys. Sci. 1999. V. 357. № 1760. P. 2543.
9. *Kingsbury N.G.* // Journ. Appl. Comput. Harmonic Analysis. 2001. V. 10. № 3. P. 234.

10. *Morlet J., Arens G., Fourgeau I., Giard D.* // Geophysics. 1982. V. 47. № 2. P. 203.
11. *Астафьева Н.М.* // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145.
12. *Addison P.S.* The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
13. *Wavelets in Physics* / Ed. J.C. Van den Berg Cambridge: Cambridge University. Press, 1993.
14. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
15. *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al.* // Nature. 1999. V. 399. № 6734. P. 461.
16. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* // Briefings in Bioinformatics. 2006. V. 7. № 4. P. 375.
17. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. № 5. P. 056207.
18. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177. № 8. С. 859.
19. *Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А. и др.* // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182. № 9. С. 905.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A. et al.* Wavelets in Neuroscience. Berlin, Springer-Verlag, 2015.
21. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. № 5. С. 465.