

УДК 530.182,621.373.826  
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-497-502

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ, В ЛЕГИРОВАННОМ ЭРБИЕМ ОПТОВОЛОКОННОМ ЛАЗЕРЕ

© М.О. Журавлев, Д.В. Лопатин, О.И. Москаленко,  
М.В. Храмова, А.Н. Писарчик, Р. Джаймс-Райте

В настоящей работе приводятся результаты численного исследования индуцированной шумом перемежаемости в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулируемым параметром. В рамках работы предложен модифицированный метод для выделения статистических характеристик перемежающегося поведения, и с помощью данной методики получены зависимости средней длительности существования различных колебательных режимов от параметра надкритичности в легированном эрбием оптоволоконном лазере.

*Ключевые слова:* вейвлет-анализ; колебательный режим; легированной эрбием оптоволоконный лазер.

Мультистабильность является одним из фундаментальных физических явлений, наблюдаемых в различных областях науки и техники, в т. ч. в электронике [1], оптике [2], механике [3] и биологии [4]. Впервые термин «мультистабильность» был введен в работе, посвященной зрительному восприятию [5]. Для диссипативных систем мультистабильность означает одновременное существование нескольких возможных конечных устойчивых состояний (аттракторов) при фиксированном наборе значений параметров системы. Устойчивое состояние, к которому стремится система, зависит от начальных условий, т. е. долгосрочная динамика системы, соответствующая одному из устойчивых состояний, определяется ее начальными условиями.

При этом в настоящее время, несмотря на большое количество работ, направленных на изучение мультистабильности [6–8], ряд вопросов, связанных с изучением этого явления, до сих пор остается не решенным. Одним из них является изучение поведения мультистабильных систем, находящихся под внешним шумовым воздействием. В работах [9–10] было показано, что воздействие флуктуаций может приводить к тому, что изначально мультистабильная система превращается в метастабильную, и в динамике системы наблюдается перемежающееся поведение, при котором происходят индуцированные шумом переключения между различными аттракторами. Однако в настоящее время не существует общей теоретической модели, которая бы описывала поведение мультистабильных систем, демонстрирующих перемежающееся поведение в присутствии шума. В связи с этим возникает необходимость детального изучения индуцированной шумом перемежаемости в динамических системах, что говорит о необходимости определения статистических характеристик такого типа поведения в мультистабильных системах, что является важным шагом исследования любого типа перемежающегося поведения [11–14]. В роли таких характеристик, как обычно, выступают зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметра надкритичности и распределение длительно-

стей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров, что позволяет однозначно определить, какой тип перемежающегося поведения реализуется в исследуемой системе.

Таким образом, целью настоящей работы являлось получение статистических характеристик перемежающегося поведения, индуцированного шумом, в мультистабильных системах, что в дальнейшем позволит построить общую теорию, описывающую данный тип перемежаемости.

В качестве объекта исследований в рамках данной работы был выбран легированный эрбием оптоволоконный лазер с модулируемым параметром [15]. В ряде недавних работ [16–17] показано, что данная динамическая система является мультистабильной, причем при внешнем шумовом воздействии на нее она демонстрирует индуцированное шумом перемежающееся поведение, которое проявляется в том, что происходит попеременная смена одного колебательного режима другим. Данная динамическая система описывается следующими уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{T_r} x \{ r_w \alpha_0 [N(\xi_1 - \xi_2) - 1] - \alpha_{th} \} + P_{sp},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sigma_{12} r_w x}{\pi r_0^2} (y \xi_1 - 1) - \frac{x}{\tau} + P_{pump},$$

где  $x$  – это интенсивность излучения лазера;  $y$  – это среднее значение верхнего уровня лазерной генерации;  $L$  – длина активного волокна в лазере;  $\xi_1$  и  $\xi_2$  представляют собой параметры, определяемые соотношением между основными состояниями: поглощением  $\sigma_{12}$ , вынужденным переходом  $\sigma_{21}$  и возбужденным состоянием поглощения  $\sigma_{23}$ ;  $T_r$  – время внутрирезонаторного кругового обхода фотона;  $\alpha_0$  – коэффициент поглощения слабого сигнала эрбиевого волокна на длине волны лазера;  $\alpha_{th}$  – коэффициент внутрирезонаторных потерь на границе;  $\tau$  – время жизни ионов эрбия в возбужденном состоянии;  $r_0$  – радиус сердцевины волокна;  $w_0$  –

радиус основной моды волокна;  $r_w$  – коэффициент, указывающий на совпадение между основной модой лазера и активного волокна, легированного эрбием. Слагаемое  $P_{sp}$  отвечает за спонтанное излучение основной моды лазера, а  $P_{pump}$  – за мощность накачки в лазере и выражается как

$$P_{pump} = P_p \frac{1 - \exp[-\alpha_0 \beta L(1 - y)]}{N_0 \pi r_0^2 L}, \quad (2)$$

где  $P_p$  – это мощность накачки на входе волокна, а  $\beta$  – безразмерный коэффициент. Параметры для моделирования были выбраны следующими:  $L = 0,88$  м,

$$T_r = 8,7 \text{ нс}, \quad r_w = 0,308, \quad \alpha_0 = 40 \text{ м}^{-1}, \quad \xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 0,4,$$

$$\alpha_{th} = 3,92 \cdot 10^{-2}, \quad \sigma_{12} = 2,3 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2, \quad r_0 = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$\tau = 10^{-2} \text{ с}, \quad \lambda_g = 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad w_0 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \text{ и } \beta = 0,5,$$

что связано с тем, что при таком выборе параметров данные численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Мощность накачки на входе волокна модулируется гармоническим сигналом

$$P_p = p [1 - m_d \sin(2\pi f_d t)], \quad (3)$$

где  $p$  – это мощность накачки;  $m_d$  – амплитуда колебаний;  $f_d$  – собственная частота колебаний лазера ( $f_d = 80$  кГц в рамках настоящей работы), при этом в данной системе возможно сосуществование до четырех периодических орбит  $A_i$  ( $i = 1,3,4,5$ ) с частотой субгармоник  $f_i = f_d / i$ : период колебаний один ( $f_1 = f_d = 80$  кГц), период колебаний три ( $f_3 \approx 27$  кГц), период колебаний четыре ( $f_4 = 20$  кГц) и период колебаний пять ( $f_5 = 16$  кГц). Если же в мощности накачки будет присутствовать слагаемое с шумом, то получим следующее соотношение

$$P_p = p [1 - m_d \sin(2\pi f_d t) + \eta G(\zeta, f_n)], \quad (4)$$

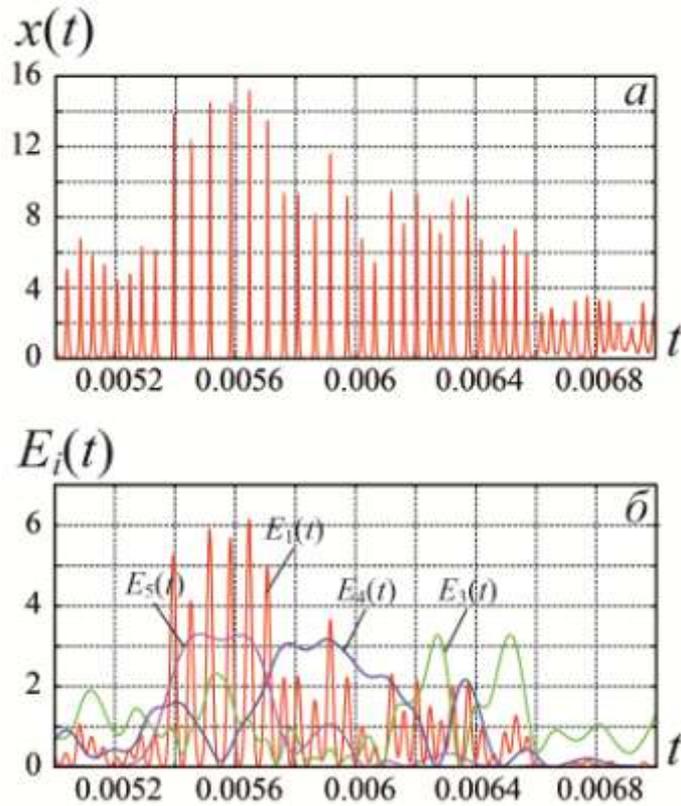
где  $\eta$  – амплитуда шума, а  $G(\zeta, f_n)$  – функция с ненулевым средним, характеризующая шум, причем  $\zeta$  меняется в пределах  $[-1,1]$ . В результате влияния шума фазовая траектория будет периодически посещать различные бассейны притяжения устойчивых аттракторов, т. е. будет происходить смена одного колебательного режима другим. Таким образом, исследуемая система перейдет из мультистабильного состояния в метастабильное, и в этом случае можно будет детектировать перемежающееся поведение, индуцированное шумом. При этом влиять на количество сосуществующих устойчивых состояний и наиболее вероятное из них будут параметры стохастической модуляции  $f_n$  и  $\eta$ . В рамках настоящей работы они были выбраны следующими:  $f_n = 30$  Гц и  $m_d = 0,95$ .

Чтобы определить статистические характеристики перемежающегося поведения, индуцированного шумом, в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулируемым параметром, была использована методика, предложенная в работе [18]. Данный метод осно-

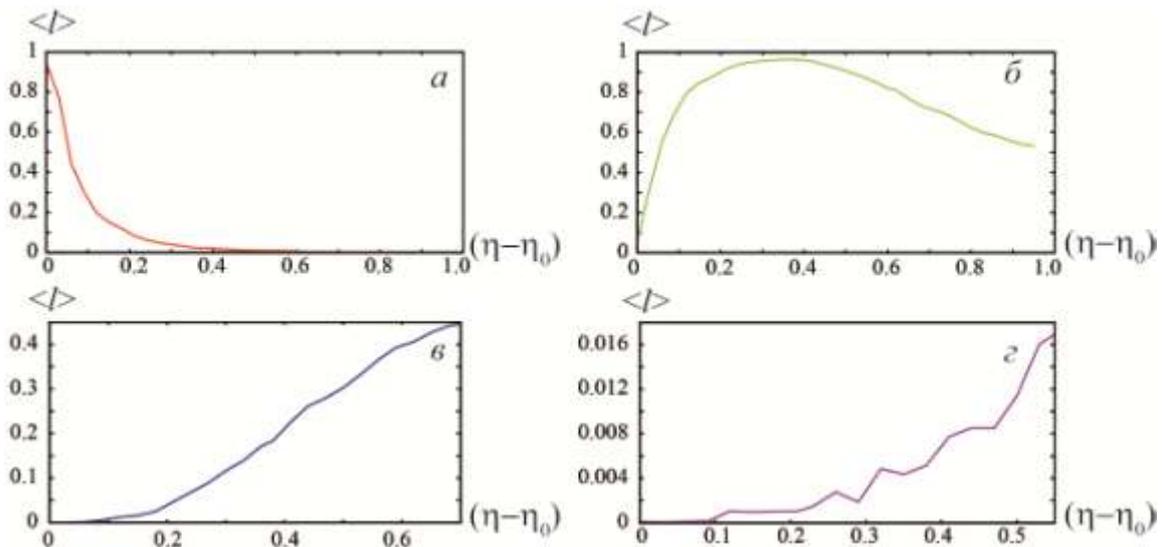
ван на использовании непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным базисом [19–21], при этом для того чтобы определить, какой из колебательных режимов реализуется в настоящий момент в исследуемой системе, необходимо сопоставить значения мгновенных распределений энергии вейвлетного преобразования на характерных временных масштабах, соответствующих каждому из колебательных режимов, которые могут существовать в данной системе, при этом необходимо учитывать нормировку вейвлетного спектра [22]. Подробно данная методика определения длительности характерных колебательных режимов описана в работе [18].

Тем не менее, данная методика не всегда позволяет корректно определить, какой колебательный режим реализуется в исследуемой системе, что хорошо иллюстрирует рис. 1а, где представлена интенсивность излучения лазера, и рис. 1б, где приведены соответствующие ей нормированные зависимости мгновенного распределения энергии вейвлетного преобразования от времени для периодов колебаний: период колебаний один ( $f_1 = f_d = 80$  кГц), период колебаний три ( $f_3 \approx 27$  кГц), период колебаний четыре ( $f_4 = 20$  кГц) и период колебаний пять ( $f_5 = 16$  кГц). Очевидно, что в данном случае в исследуемой системе не реализуется период колебаний один, при этом согласно данной методике он присутствует, кроме этого длительность существования «ошибочного» колебательного режима меньше одного периода. Стоит отметить, что данный артефакт метода является достаточно серьезным, т. к. полученные таким образом статистические характеристики будут значительно отличаться от реальных. В связи с этим при использовании данной методики выделения статистических характеристик было наложено дополнительное условие, что длительность любого колебательного режима не может быть меньше одного периода колебаний. Такая модернизация исходного метода позволила избавиться от артефактов.

Далее было проведено численное моделирование легированного эрбием оптоволоконного лазера и были получены статистические характеристики (зависимость средней длительности существования колебательного режима от параметра надкритичности) для каждого из колебательных режимов. При этом в качестве параметра надкритичности выступал параметр  $(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta_0$  – граничное значение амплитуды шума, при котором в исследуемой системе становится возможным наблюдать тот или иной колебательный режим. На рис. 2 представлены зависимости средней длительности существования различных колебательных режимов от параметра надкритичности. Стоит отметить, что средние длительности существования всех колебательных режимов не подчиняются ни одному из известных теоретических законов для различных типов перемежаемости. Тем не менее, для периода 1 (рис. 2а) данная зависимость ведет себя очень схоже с теоретическими закономерностями для известных типов перемежаемости, а именно, при минимальных значениях параметра надкритичности среднее время существования данного типа колебания максимально, а при увеличении данного параметра среднее время существования уменьшается и после некоторого значения становится почти постоянным. Тем не менее, для других колебательных режимов (рис. 2б–2г) это не свойственно.



**Рис. 1.** *a* – приведена зависимость интенсивности излучения от времени для оптоволоконного лазера, легированного эрбием с модулируемым параметром, при этом амплитуда шума равна  $\eta = 0,85$ , *b* – представлены нормированные зависимости мгновенного распределения энергии вейвлетного преобразования от времени для периода колебаний один  $f_1 = f_d = 80$  кГц, для периода колебаний три  $f_3 \approx 27$  кГц, для периода колебаний четыре  $f_4 = 20$  кГц и для периода колебаний пять  $f_5 = 16$  кГц



**Рис. 2.** *a* – зависимость средней длительности существования периода колебаний один от параметра надкритичности  $(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta_0 = 0,05$ , *b* – зависимость средней длительности существования периода колебаний три от параметра надкритичности  $(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta_0 = 0,05$ , *c* – зависимость средней длительности существования периода колебаний четыре от параметра надкритичности  $(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta_0 = 0,29$ , *d* – зависимость средней длительности существования периода колебаний пять от параметра надкритичности  $(\eta - \eta_0)$ , где  $\eta_0 = 0,44$

Таким образом, результаты, полученные в рамках настоящей работы, представляют значительный интерес, т. к. в дальнейшем позволят построить корректную теоретическую модель, описывающую индуцированную шумом перемежаемость в мультистабильных системах. Кроме этого, модифицированный метод для выделения статистических характеристик в мультистабильных системах может быть использован при дальнейших исследованиях индуцированной шумом перемежаемости [23–24].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Maurer J., Libchaber A. Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He // *Journal de Physique Lettres*. 1980. V. 41. № 21. P. 515-518.
- Brun E., Derighetti B., Meier D., Holzner R., Ravani M.J. Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser // *Opt. Soc. Amer B*. 1985. V. 2. P. 156-167.
- Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester: Wiley, 1986. 460 p.
- Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.G. Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett*. 1996. V. 76. P. 708-711.
- Atteneave F. Multistability in perception // *Sci. Am*. 1971. V. 225. № 6. P. 63-71.
- Giglio M., Musazzi S., Perini U. Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations // *Phys. Rev. Lett*. 1981. V. 47. P. 243-246.
- Bachar G., Segev E., Shtempluck O., Shaw S.W., Buks E. Noise-induced intermittency in a superconducting microwave resonator // *EPL*. 2010. V. 89. № 1. P. 17003.
- Pedaci F., Giudici M., Tredicce J.R., Giacomelli G. Stochastic resonance in bulk semiconductor lasers // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71. P. 36125.
- Kuno M., Fromm D.P., Hamann H.F., Gallagher A., Nesbitt D.J. Nonexponential “blinking” kinetics of single CdSe quantum dots: A universal power law behavior // *J. Chem. Phys*. 2000. V. 112. P. 3117-3120.
- Stone E., Holmes P. Noise induced intermittency in a model of a turbulent boundary layer // *Physica D*. 1989. V. 37. P. 20-32.
- Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E.Yu., van Rijn C.M. On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2006. V. 16. P. 043111.
- Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A. On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy // *Brain research*. 2012. V. 1436. P. 147-156.
- Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 78. P. 036212.
- Koronovskii A.A., Куровская М.К., Храмов А.Е. Распределение длительностей ламинарных фаз для перемежаемости типа I в присутствии шума // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17. № 5. С. 43-59.
- Pisarchik A. N., Kir'yanov A., Barmenkov Y., Jaimes-Reategui R. Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2005. V. 22. № 10. P. 2107-2114.
- Campos-Mejia A., Pisarchik A.N., Arroyo-Almanza D.A. Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor laser // *Chaos Solitons Fractals*. 2013. V. 54. P. 96-100.
- Pisarchik A. N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System // *Phys. Rev. Lett*. 2011. V. 107. P. 274101.
- Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Писарчик А.Н., Ридер Д.Р., Храмов А.Е. Выделение характерных колебательных режимов в динамике легированного эрбием оптоволоконного лазера // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2015. Т. 79. № 12. С. 1711-1714.
- Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
- Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2004. V. 14. № 3. P. 603-610.
- Короновский А.А., Храмов А.Е. Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖТФ*. 2001. Т. 27. № 1. С. 3-11.
- Koronovskii A.A., Hramov A.E., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 75. P. 056207.
- Короновский А.А., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Неавтономная индуцированная шумом синхронизация // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2009. Т. 73. № 12. С. 1728-1731.
- Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е. К вопросу о синхронном поведении связанных систем с дискретным временем // *Письма в ЖЭТФ*. 2005. Т. 82. № 3. С. 176-179.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-32-20299 и 16-32-60078).

Поступила в редакцию 4 апреля 2016 г.

UDC 530.182,621.373.826

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-497-502

## STATISTICAL CHARACTERISTICS OF NOISE-INDUCED INTERMITTENCY IN ERBIUM-DOPED FIBER LASER

© M.O. Zhuravlev, D.V. Lopatin, O.I. Moskalenko,  
M.V. Khranova, A.N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui

In this paper we present the results of numerical studies of noise-induced intermittency in the erbium-doped optical fiber laser with a modulated parameter. We propose modified wavelet-based method for the determination of the statistical characteristics of intermittent behaviour and using this technique obtain dependences of the average duration of the existence of different oscillation regimes on the critical parameter in the erbium-doped optical fiber laser.

*Key words:* wavelet; oscillation regimes; erbium-doped optical fiber laser.

## REFERENCES

1. Maurer J., Libchaber A. Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He. *Journal de Physique Lettres*, 1980, vol. 41, no. 21, pp. 515-518.
2. Brun E., Derighetti B., Meier D., Holzner R., Ravani M.J. Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser. *Opt. Soc. Amer B.*, 1985, vol. 2, pp. 156-167.
3. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester, Wiley Publ., 1986. 460 p.
4. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.G. Multistability and delayed recurrent loops. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 708-711.
5. Atteneave F. Multistability in perception. *Sci. Am.*, 1971, vol. 225, no. 6, pp. 63-71.
6. Giglio M., Musazzi S., Perini U. Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 47, pp. 243-246.
7. Bachar G., Segev E., Shtempluck O., Shaw S.W., Buks E. Noise-induced intermittency in a superconducting microwave resonator. *EPL*, 2010, vol. 89, no. 1, p. 17003.
8. Pedaci F., Giudici M., Tredicce J.R., Giacomelli G. Stochastic resonance in bulk semiconductor lasers. *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, pp. 36125.
9. Kuno M., Fromm D.P., Hamann H.F., Gallagher A., Nesbitt D.J. Nonexponential "blinking" kinetics of single CdSe quantum dots: A universal power law behavior. *J. Chem. Phys.*, 2000, vol. 112, pp. 3117-3120.
10. Stone E., Holmes P. Noise induced intermittency in a model of a turbulent boundary layer. *Physica D.*, 1989, vol. 37, pp. 20-32.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E.Yu., van Rijn S.M. On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy. *CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2006, vol. 16, p. 043111.
12. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A. On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy. *Brain research*, 2012, vol. 1436, pp. 147-156.
13. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise. *Phys. Rev. E.*, 2008, vol. 78, p. 036212.
14. Koronovskiy A.A., Kurovskaya M.K., Khramov A.E. Raspredelenie dlitel'nostey laminarnykh faz dlya peremezhnosti tipa I v prisutstvii shuma. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, 2009, vol. 17, no. 5, pp. 43-59.
15. Pisarchik A. N., Kir'yanov A., Barmenkov Y., Jaimes-Reategui R. Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2005, vol. 22, no. 10, pp. 2107-2114.
16. Campos-Mejia A., Pisarchik A.N., Arroyo-Almanza D.A. Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor laser. *Chaos Solitons Fractals*, 2013, vol. 54, pp. 96-100.
17. Pisarchik A. N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, p. 274101.
18. Zhuravlev M.O., Koronovskiy A.A., Moskalenko O.I., Pisarchik A.N., Rider D.R., Khramov A.E. Vydelenie kharakternykh kolebatel'nykh rezhimov v dinamike legirovannogo erbiem optovolokonnogo lazera. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya*, 2015, vol. 79, no. 12, p. 1711-1714.
19. Koronovskiy A.A., Khramov A.E. *Nepreryvnyy vevletnyy analiz i ego prilozheniya*. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 176 p.
20. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2004, vol. 14, no. 3, pp. 603-610.
21. Koronovskiy A.A., Khramov A.E. Ob effektivnom analize perekhoda k khaosu cherez peremezhnost' s pomoshch'yu veyvletnogo preobrazovaniya. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki (Pis'ma v ZhTF) – Applied Physics Letters*, 2001, vol. 27, no. 1, pp. 3-11.
22. Koronovskii A.A., Hramov A.E., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform. *Phys. Rev. E.*, 2007, vol. 75, pp. 056207.
23. Koronovskiy A.A., Khramov A.E., Shurygina S.A. Neavtonomnaya indutsirovannaya shumom sinkhronizatsiya. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya*, 2009, vol. 73, no. 12, pp. 1728-1731.
24. Koronovskiy A.A., Khramov A.E., Khramova A.E. K voprosu o sinkhronnom povedenii svyazannykh sistem s diskretnym vremenem. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki» (Pis'ma v ZhETF) – Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 2005, vol. 82, no. 3, pp. 176-179.

GRATITUDE: The work is fulfilled under support of Russian Fund of Fundamental Research (projects no. 15-32-20299 and 16-32-60078).

Received 4 April 2016

Журавлев Максим Олегович, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Zhuravlev Maksim Olegovich, National Research Saratov State University; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Research Worker, e-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Лопатин Дмитрий Валерьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий, e-mail: +79107540080@ya.ru

Lopatin Dmitriy Valerevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Mathematical Modeling and Information Technology Department, e-mail: +79107540080@ya.ru

Москаленко Ольга Игоревна, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Moskalenko Olga Igorevna, National Research Saratov State University, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Храмова Марина Викторовна, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, кандидат педагогических наук, доцент, e-mail: mhramova@gmail.com

Khramova Marina Viktorovna, National Research Saratov State University, Saratov, Russian Federation, Candidate of Pedagogy, Associate Professor, e-mail: mhramova@gmail.com

Писарчик Александр Николаевич, Центр биомедицинских технологий, Мадридский политехнический университет, г. Мадрид, Испания, кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: apisarch@cio.mx

Pisarchik Aleksander Nikolaevich, Center for Biomedical Technology, Technical University of Madrid, Madrid, Spain, Candidate Physics and Mathematics, Professor, e-mail: apisarch@cio.mx

Джаймс-Райтег Ридер, Гвадалахарский университет, Университетский центр Лос-Лагос, Халиско, Мексика, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: rjaimes@culagos.udg.mx

Jaimes-Reategui Rider, Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de los Lagos, Jalisco, Mexico, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: rjaimes@culagos.udg.mx