

01.3

Оценка времени предсказуемости зашумленной хаотической динамики по точечным последовательностям

© Я.Х. Мохаммад¹, О.Н. Павлова¹, А.Н. Павлов^{1,2,¶}¹ Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского² Саратовский государственный технический университет
им. Гагарина Ю.А.

¶ E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступило в Редакцию 29 марта 2016 г.

Предложен метод повышения точности расчета времени предсказуемости зашумленной хаотической динамики по точечным последовательностям. На примере режима фазово-когерентного хаоса проиллюстрированы общие закономерности, наблюдаемые при применении данного метода к точечным последовательностям двух типов моделей пороговых устройств.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.02.44186.16268

Основная особенность систем, демонстрирующих хаотические режимы колебаний, состоит в том, что малое изменение начальных условий или параметров системы приводит к потере предсказуемости колебательного процесса через некоторое время. Степень предсказуемости будет меняться, если хаотический режим исследуется в условиях дополнительного присутствия различных источников флуктуаций. Чтобы определить максимальное время, в течение которого можно осуществить прогноз поведения системы, было введено понятие горизонта предсказуемости [1], который зависит от наличия априорных сведений об исследуемой системе и статистики присутствующего шума. Если прогноз осуществляется на основе экспериментальных данных, то в качестве времени предсказуемости τ_p часто используют „время Ляпунова“, т.е. время, за которое расстояние между соседними фазовыми траекториями системы возрастает в e раз. Оценка предела предсказуемости системы с хаотической динамикой как величины, обратной старшему показателю Ляпунова ($\tau_p = 1/\lambda_1$), означает, что если

расчеты старшего показателя приведут к неправильному значению λ_1 , то возникнет ошибка в определении времени прогноза.

Точность расчета λ_1 зависит от того, какая информация о динамике системы известна. Если заданы уравнения математической модели, то вычислить спектр ляпуновских показателей можно с требуемой точностью, применяя стандартный алгоритм [2]. Если анализ проводится по временной зависимости одной из динамических переменных, то применяются методы реконструкции динамических систем [3–5]. Задача расчета показателей Ляпунова усложняется, если эта переменная подвергается преобразованиям, в результате которых сокращается объем доступной информации о динамике. В частности, в работах [6–9] рассмотрены преобразования хаотических сигналов пороговыми устройствами, в результате которых носителями информации о динамике системы становятся последовательности стереотипных импульсов, генерируемых при превышении порогового уровня, классифицируемые как точечные последовательности.

Возможность оценки по точечным последовательностям таких характеристик хаотической динамики, как корреляционная размерность и показатели Ляпунова, ранее была рассмотрена в работах [6–13], где сформулированы условия, при которых можно правильно идентифицировать режим динамики на входе порогового устройства. При высокой частоте генерации импульсов пороговым устройством была доказана теорема Зауэра, применимая к точечным последовательностям моделей типа „накопление–сброс“ (НС) [10]. При сравнительно низкой частоте генерации, а также для других моделей пороговых устройств, например моделей типа „пересечения порога“ (ПП), возможность расчета показателей Ляпунова была подтверждена численными расчетами [11–15]. Однако в отмеченных публикациях не учитывалось наличие измерительного шума во входном колебательном процессе, приводящего к варьированию длительности межимпульсных интервалов (МИ) на выходе порогового устройства. Целью данной работы является модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова [5], которая позволяет повысить точность проводимых оценок времени предсказуемости хаотической динамики в случае, когда точечная последовательность может быть зашумленной, но при этом отсутствует информация об интенсивности шума.

Основная идея предложенного подхода состоит в следующем. Стандартный алгоритм [5] предусматривает расчет λ_1 как средней скорости экспоненциального разбегания траекторий в реконструированном

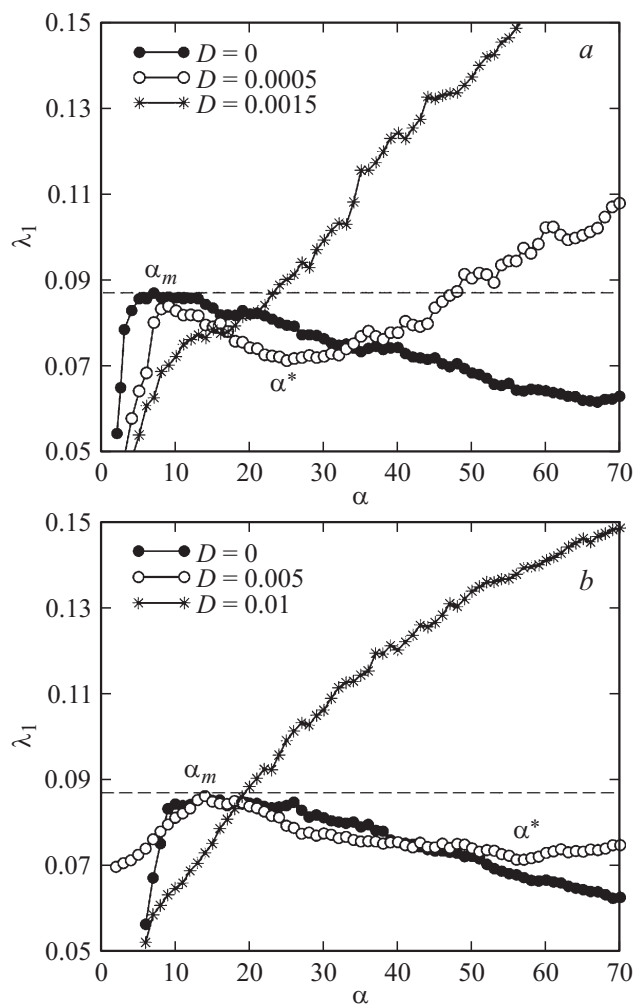
фазовом пространстве. При анализе одномерных проекций фазовых траекторий, принадлежащих хаотическому аттрактору, после проведения реконструкции определяются границы линейного приближения $[l_{\min}, l_{\max}]$ для вектора возмущения $r(t)$, соответствующие разбеганию траекторий, обусловленному динамикой системы. При выходе за верхнюю границу l_{\max} происходит недооценка λ_1 из-за нелинейного ограничения размера вектора возмущения. Нижняя граница вводится для исключения эффекта дополнительного разбегания траекторий, вызванного присутствием измерительного шума в анализируемом сигнале. Алгоритм [5] применим и при анализе точечных последовательностей после их предварительной обработки. В случае НС-модели, описывающей процесс генерации импульсов в моменты времени T_i при достижении интегралом от входного сигнала $S(t)$ порогового уровня θ , проводится восстановление входного сигнала $S(T_i) \approx \theta / (T_{i+1} - T_i)$, точность которого возрастает с увеличением частоты генерации [7]. Для ПП-модели, предусматривающей генерацию импульсов при переходе входного сигнала через пороговый уровень, используется прием, основанный на аппроксимации усредненной мгновенной частоты колебаний $\omega(T_i) = 2\pi / (T_{i+1} - T_i)$ [11]. Далее осуществляется переход к сигналу с равномерной выборкой (соответственно $S(i\Delta t)$ и $\omega(i\Delta t)$) путем интерполяции полученных отсчетов, и этот сигнал анализируется на основе метода [5].

Наличие шума создает ряд сложностей при проведении вычислений. Чтобы повысить точность расчета старшего показателя Ляпунова, предлагаем проводить анализ зависимости λ_1 от максимальной ошибки ориентации α , которая определяется как угол между векторами возмущения до и после перенормировки. Из общих соображений можно предположить, что очень малые и очень большие α будут приводить к снижению величины λ_1 , поэтому при расчете показателя Ляпунова необходимо задавать промежуточные значения.

На рисунке, *a* приведены результаты расчета старшего показателя Ляпунова режима фазово-когерентного хаоса в модели Ресслера

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, & \frac{dy}{dt} &= x + ay, & \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c), \\ a &= 0.15, & b &= 0.2, & c &= 10 \end{aligned} \quad (1)$$

по последовательности 2000 МИ на выходе НС-модели, на вход которой поступал сигнал $S(t) = x(t) + C + D\xi(t)$, где C — постоянная величина,



Зависимости старшего показателя Ляпунова хаотического режима колебаний системы (1), вычисленные по последовательностям МИ модели НС (а) и ПП (b), от максимальной ошибки ориентации вектора возмущения (в градусах).

вводимая для того, чтобы избежать отрицательных значений входного сигнала (в проводимых расчетах $C = 35$), $\xi(t)$ — белый шум. Представленные результаты получены при значениях $l_{\min} = 0.01$, $l_{\max} = 0.1$. Для удобства проводимых вычислений предварительно осуществлялось приведение сигнала $S(i\Delta t)$ к единичному интервалу.

Отправными в исследованиях являются зависимости $\lambda_1(\alpha)$, относящиеся к динамике в отсутствие шума ($D = 0$). В этом случае наблюдается максимум $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_m$, который соответствует теоретически ожидаемому значению старшего показателя, вычисленному по известным уравнениям математической модели (1) с применением алгоритма [2] (в рассматриваемом примере $\lambda_1 = 0.087$ — пунктирная линия на рисунке, *a*). Слева от максимума недооценка λ_1 происходит из-за низкой вероятности выбора малых по модулю векторов возмущения и частого выхода за границы линейного приближения. Справа от максимума из-за возрастающих ошибок ориентации приходится учитывать разбегание траекторий в направлениях, ортогональных направлению их максимального разбегания.

Важно отметить, что приведенная зависимость $\lambda_1(\alpha)$ имеет характерный вид, качественно не меняющийся при анализе систем с различным хаотическим поведением (дополнительно были исследованы режимы хаотических колебаний в модели Лоренца, генераторе с инерционной нелинейностью, а также рассмотрены случаи слабого и развитого хаоса в модели Ресслера). Оценка времени предсказуемости с помощью рисунка, *a* приводит к значению $\tau_p(\alpha_m) = 1/\lambda_1(\alpha_m)$. Отклонение от α_m означает, что вычисленная величина τ_p будет существенно превышать длительность прогноза, вычисленную по уравнениям системы (1), приводя к недостоверным выводам о степени детерминированности анализируемой динамики.

Характер зависимости $\lambda_1(\alpha)$ меняется при наличии шума в последовательности МИ, который может быть вызван присутствием помех во входном сигнале или флуктуирующим пороговым уровнем. При достижении значения α^* появляется положительный наклон $\lambda_1(\alpha)$ в области $\alpha > \alpha^*$, и соответствующее значение α^* стремится к α_m с ростом интенсивности шума. Такие изменения зависимости $\lambda_1(\alpha)$ также являются характерными для всех рассмотренных примеров систем с хаотической динамикой при наличии шума в последовательности МИ. Обнаруженная закономерность позволяет по виду зависимости $\lambda_1(\alpha)$ качественно судить о присутствии шума и его интенсивности, так как

с увеличением D не только уменьшается значение α^* , но и растет наклон $\lambda_1(\alpha)$ в области $\alpha > \alpha^*$. Начиная с некоторой интенсивности D , максимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ исчезает, и результаты оценки времени предсказуемости перестают быть достоверными. Для примера, приведенного на рисунке, a , результаты расчетов становятся недостоверными при $D = 0.0015$, что соответствует отношению интенсивности шума к средней длительности МИ $5 \cdot 10^{-4}$.

В случае ПП-модели были обнаружены аналогичные закономерности. На рисунке, b приведены примеры проведенных расчетов для режима фазово-когерентного хаоса в системе (1) в отсутствие шума и при наличии флуктуаций в последовательности МИ. В качестве входного сигнала ПП-модели была рассмотрена переменная состояния $x(t)$, а порог определялся равенством $\theta = 0$. По-прежнему в отсутствие шума наблюдается характерный максимум $\lambda_1(\alpha)$ (минимум $\tau_p(\alpha)$), соответствующий теоретически ожидаемым оценкам (пунктирная линия), а при наличии шума происходят изменения наклона в области $\alpha > \alpha^*$, и величина наклона (как и соответствующее значение α^*) меняется с ростом интенсивности шума.

Таким образом, в данной работе предложена модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова, предусматривающая построение зависимости величины показателя от ошибки ориентации векторов в реконструированном фазовом пространстве. Предложенный подход позволил установить характерное поведение $\lambda_1(\alpha)$, по виду которого можно сделать вывод о присутствии шума и при наличии данных, полученных при разном уровне шума, провести их качественное сравнение по интенсивности присутствующих помех. Выбор параметра α , соответствующего максимуму $\lambda_1(\alpha)$, позволяет повысить точность оценки времени предсказуемости при анализе различных типов зашумленных точечных последовательностей.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00224).

Список литературы

- [1] *Lighthill J.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1986. V. 407. P. 35.
- [2] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9.

- [3] *Takens F.* // *Dynamical Systems and Turbulence* / Eds D.A. Rang and L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics. V. 898. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
- [4] *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 712.
- [5] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // *Physica D.* 1985. V. 16. P. 285.
- [6] *Sauer T.* // *Chaos.* 1995. V. 5. P. 127.
- [7] *Racicot D.M., Longtin A.* // *Physica D.* 1997. V. 104. P. 184.
- [8] *Hegger R., Kantz H.* // *Europhys. Lett.* 1997. V. 38. P. 267.
- [9] *Castro R., Sauer T.* // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55. P. 287.
- [10] *Sauer T.* // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 72. P. 3911.
- [11] *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58. P. R4.
- [12] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 61. P. 5033.
- [13] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 036205.
- [14] *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., Kurths J.* // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 91. P. 022921.
- [15] *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., Kurths J.* // *Chaos.* 2015. V. 25. P. 013118.