

01

Установление обобщенной синхронизации в сети логистических отображений

© А.А. Короновский^{1,2}, О.И. Москаленко^{1,2}, А.А. Пивоваров¹,
А.Е. Храмов^{1,2}

¹ Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

² Саратовский государственный технический университет

им. Гагарина Ю.А.

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Поступило в Редакцию 17 марта 2015 г.

Проведено изучение процессов установления явления обобщенной хаотической синхронизации в сети логистических отображений, связанных взаимно; рассмотрен характер взаимодействия элементов сети при переходе от асинхронной динамики к синхронной при увеличении параметра связи. Для выяснения особенностей взаимодействия элементов сети и возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации использован метод фазовых трубок [5].

Среди различных известных типов хаотической синхронизации [1], таких как фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием (lag-синхронизация), полная синхронизация, изучение обобщенной синхронизации привлекает большое внимание исследователей [2–4]. Обобщенная хаотическая синхронизация может возникать между различными осцилляторами, в том числе между осцилляторами с разной размерностью фазового пространства. Критерием установления режима обобщенной синхронизации является наличие функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих осцилляторов [2,5]. На данный момент явление обобщенной синхронизации подробно изучено для

достаточно широкого класса взаимодействующих систем: исследованы как системы с дискретным временем, связанные однонаправленно и взаимно [5], так и потоковые системы с однонаправленной [6] и взаимной [7] связью (включая пространственно-распределенные системы [8–10]).

Следующим шагом в изучении явления обобщенной синхронизации стало исследование сетей нелинейных элементов, однако в силу специфики и сложности рассматриваемых систем [7] в данном направлении исследований на настоящий момент существует много вопросов. Одному из таких вопросов, связанных с установлением режима обобщенной хаотической синхронизации в сетях нелинейных элементов, и посвящена данная работа.

В качестве простейшей модельной сети связанных между собой нелинейных элементов выбрана система пяти (x_1, \dots, x_5) взаимно связанных друг с другом логистических отображений:

$$x_{in+1} = f(x_{in}, a_i) + \varepsilon C_{ij} \sum (f(x_{jn}, a_j) - f(x_{in}, a_j)), \quad (1)$$

где $f(x, a) = ax(1-x)$, $i, j = 1, \dots, 5$ — номер элемента сети, C_{ij} — матрица связи ($C_{ij} = 0$ — отсутствие связи между элементами, $C_{ij} = 1$ — каждый элемент сети взаимодействует с остальными), ε — коэффициент связи. Величина параметра связи ε одинакова для всех элементов сети и является управляющим параметром, определяющим устанавливающийся режим, в то время как управляющие параметры a_i ($i = 1, \dots, 5$) были выбраны различными: $a_1 = 3.75$, $a_2 = 3.76$, $a_3 = 3.77$, $a_4 = 3.78$, $a_5 = 3.79$. Топология связей в сети при рассмотрении была выбрана в виде „каждый с каждым“ (рис. 1), $C_{ij} = 1$.

Классическим методом детектирования режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является метод вспомогательной системы [5], но в случае исследования взаимодействия систем, связанных взаимно, по причинам, изложенным в работах [7,11,12], этот метод оказывается неприменимым. Как следствие, необходимо использовать другие методы, например, расчет спектра показателей Ляпунова [11,13]. В случае двух связанных осцилляторов критерием наличия обобщенной синхронизации является переход через ноль в область отрицательных значений одного из двух старших положительных показателей Ляпунова, в то время как другой старший показатель Ляпунова остается положительным [6,14] (ситуация с двумя

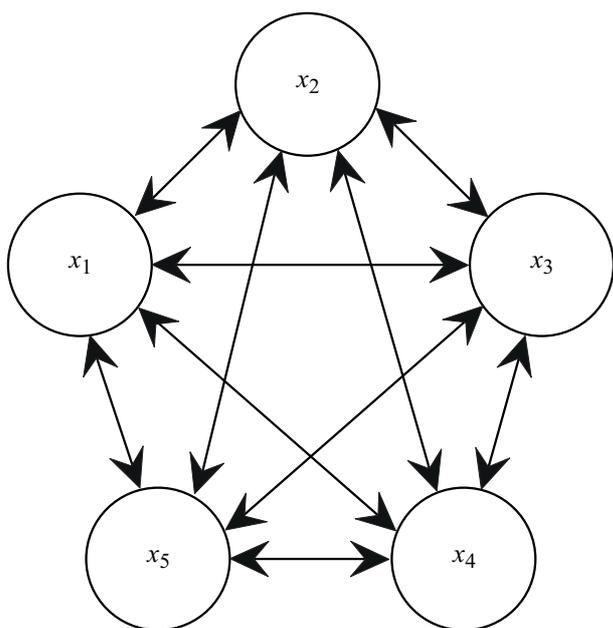


Рис. 1. Топология рассматриваемой сети из пяти логистических отображений.

положительными показателями Ляпунова автономных осцилляторов, т. е. режим гиперхаотических колебаний, в данной работе не рассматривается). В случае же сети, состоящей из N нелинейных элементов, при малых значениях параметра связи спектр показателей Ляпунова будет характеризоваться N положительными величинами, которые с увеличением параметра связи будут последовательно переходить в область отрицательных значений [7]. Для сети из пяти связанных логистических отображений критерием возникновения режима обобщенной синхронизации в системе будет служить переход в область отрицательных значений четырех из пяти показателей Ляпунова (первый показатель остается положительным).

На рис. 2, *a* представлена зависимость пяти показателей Ляпунова для рассматриваемой системы взаимно связанных логистических отображений (1) от величины коэффициента связи ε . Из рисунка видно, что зависимость $\lambda(\varepsilon)$ может быть разделена на три области (рис. 2, *a*):

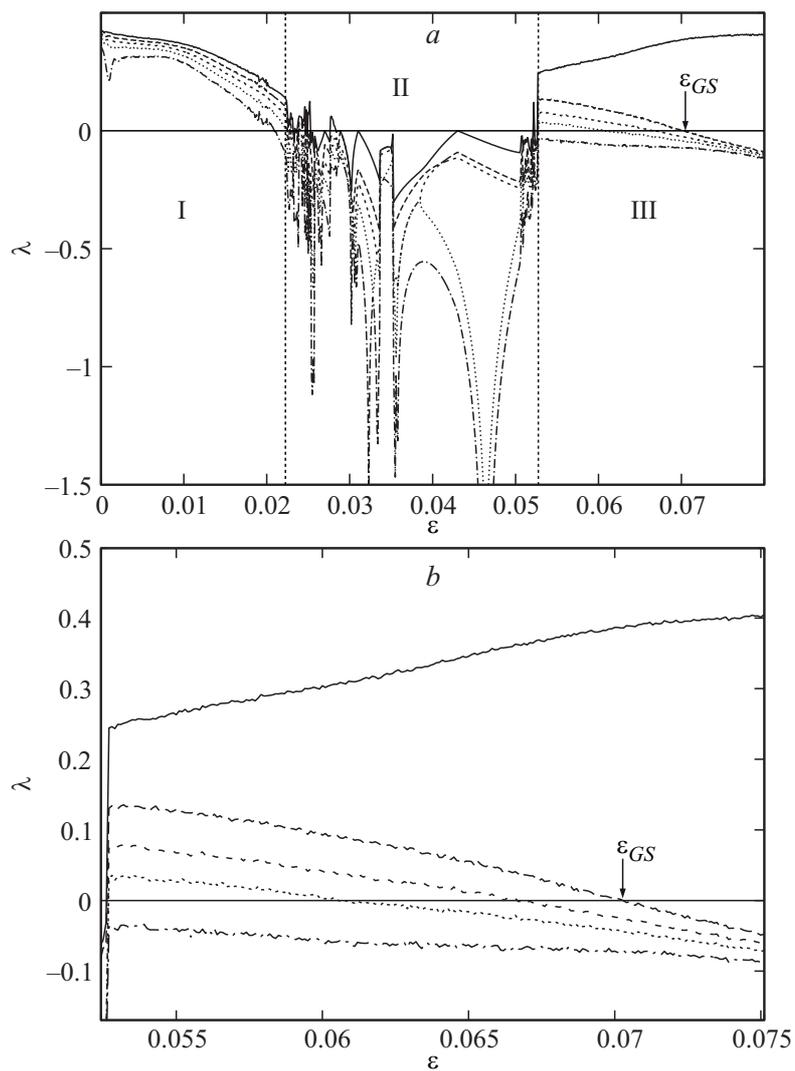


Рис. 2. *a* — зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи ε , *b* — область значений III в более крупном масштабе.

$\varepsilon \in [0; 0.023)$ — область асинхронной динамики (I); $\varepsilon \in [0.023; 0.054]$ — окна периодичности (II); $\varepsilon \in (0.054; 0.071]$ — область перехода к режиму обобщенной синхронизации (III). В области перехода к режиму обобщенной хаотической синхронизации четыре показателя Ляпунова последовательно меняют знак, пересекая ось абсцисс (рис. 2, *b*). Момент окончательного перехода к режиму обобщенной синхронизации (смена знака вторым по старшинству показателем Ляпунова) при значении параметра связи $\varepsilon_{GS} \approx 0.0703$ отмечен на рис. 2, *b* стрелкой. Таким образом, на границах области (III) система демонстрирует соответственно асинхронную ($\varepsilon < 0.054$) и синхронную ($\varepsilon > 0.071$) динамику. В то же самое время, в отличие от случая двух осцилляторов, резкая граница между синхронным и асинхронным поведением в данном случае отсутствует, и имеет место постепенная перестройка динамики элементов сети, основные механизмы и закономерности которой на настоящий момент времени неизвестны.

Для понимания процессов, происходящих в области III, где часть показателей Ляпунова уже сменила знак, необходимо использовать метод фазовых трубок [5,12]. Идея метода состоит в том, что при рассмотрении динамики связанных осцилляторов в одном из них необходимо выбрать опорную точку x_n^l и зафиксировать предысторию этой точки на K шагов назад $x_{n-k}^l (k = 0, \dots, K)$. Далее необходимо найти ближайшего соседа выбранной опорной точки x_j^l и проследить за тем, чтобы фазовые траектории x_{n-k}^l и $x_{j-k}^l (k = 0, \dots, K)$ на протяжении всего интервала предыстории K были близки, т.е. обе фазовые траектории должны находиться внутри фазовой трубки длиной K [5,12]. При выполнении условия близости фазовых траекторий необходимо зафиксировать образы ближайших соседей x_j^m в фазовых пространствах остальных осцилляторов, а в качестве численной характеристики синхронизма следует рассматривать величину дисперсии значений образов ближайших соседей x_j^m .

В ходе исследования были выбраны два значения параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$ и $\varepsilon_2 = 0.068$, как представляющие наибольший интерес. При значении ε_1 лишь один показатель Ляпунова является отрицательным, тогда как при значении параметра связи ε_2 уже три показателя являются отрицательными (рис. 2, *b*). В соответствии с теорией описанного выше метода фазовых трубок все узлы рассматриваемой сети были попарно исследованы для составления четкой картины характера их взаимодействия. Значения величин дисперсии распределений расстояний между

Таблица 1. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	$3.021 \cdot 10^{-7}$	$3.788 \cdot 10^{-7}$	$2.005 \cdot 10^{-7}$	$6.002 \cdot 10^{-7}$
x_2	$1.232 \cdot 10^{-6}$	—	$4.622 \cdot 10^{-6}$	$1.103 \cdot 10^{-6}$	$1.061 \cdot 10^{-6}$
x_3	$2.402 \cdot 10^{-6}$	$2.310 \cdot 10^{-6}$	—	$2.190 \cdot 10^{-6}$	$3.133 \cdot 10^{-6}$
x_4	$5.664 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-6}$	$1.232 \cdot 10^{-6}$	—	$7.023 \cdot 10^{-6}$
x_5	$2.891 \cdot 10^{-6}$	$5.152 \cdot 10^{-6}$	$7.617 \cdot 10^{-6}$	$3.686 \cdot 10^{-6}$	—

Таблица 2. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_2 = 0.068$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	$1.326 \cdot 10^{-7}$	$1.533 \cdot 10^{-7}$	$2.513 \cdot 10^{-7}$	$2.763 \cdot 10^{-7}$
x_2	$1.099 \cdot 10^{-7}$	—	$1.592 \cdot 10^{-7}$	$2.990 \cdot 10^{-7}$	$3.102 \cdot 10^{-7}$
x_3	$2.264 \cdot 10^{-7}$	$1.278 \cdot 10^{-7}$	—	$4.908 \cdot 10^{-7}$	$3.565 \cdot 10^{-7}$
x_4	$8.002 \cdot 10^{-7}$	$7.393 \cdot 10^{-7}$	$6.773 \cdot 10^{-7}$	—	$5.745 \cdot 10^{-7}$
x_5	$3.348 \cdot 10^{-6}$	$3.960 \cdot 10^{-6}$	$3.496 \cdot 10^{-6}$	$3.841 \cdot 10^{-6}$	—

ближайшими соседями для различных узлов сети приведены в табл. 1 и 2 для двух значений параметра связи соответственно.

Номера столбцов соответствуют номерам узлов, в которых была фиксирована опорная точка x_n^l , номера же строк соответствуют номерам тех узлов, в отношении которых выясняется характер взаимодействия. При рассмотрении внесенных в таблицы данных нетрудно заметить, что значения дисперсии для некоторых пар узлов сети резко отличаются от остальных. В соответствии с методом ближайших соседей можно сделать вывод о том, что при малой величине дисперсии (в рассматриваемом случае $\sim 10^{-7}$) рассматриваемые элементы синхронизованы с точки зрения обобщенной синхронизации, тогда как в случае большей дисперсии ($\sim 10^{-6}$) элементы еще не находятся в режиме синхронизма. В таком случае можно сделать вывод о том, что при значении параметра связи $\varepsilon_1 = 0.058$ четыре системы из пяти демонстрируют поведение, синхронное с первой системой, в то время как первая система не синхронна с оставшимися. Обратную ситуацию можно отметить при значении параметра связи $\varepsilon_2 = 0.068$, где пятая система демонстрирует

асинхронную динамику, тогда как остальные элементы сети синхронизованы друг с другом.

Таким образом, в данной работе проведено исследование явления обобщенной синхронизации в сети связанных взаимно логистических отображений, с использованием методов расчета спектра показателей Ляпунова и фазовых трубок выявлен характер взаимодействия нелинейных элементов сети в области перехода от асинхронной динамики к синхронной.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00224). Научная деятельность А. Храмова поддержана также грантом Министерства образования и науки РФ (№ 931).

Список литературы

- [1] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2001).
- [2] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 980.
- [3] *Dmitriev B.S., Hramov A.E.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 074 101.
- [4] *Filatov R.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301–308.
- [5] *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E.* // Chaos, Solitons, Fractals. 2013. V. 46. P. 12–18.
- [6] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528–4535.
- [7] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 036 216.
- [8] *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). P. 748–764.
- [9] *Moskalenko O.I., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ovchinnikov A.A.* // Europhysics Journal. B. 2011. V. 82(1). P. 69–82.
- [10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72(3). P. 037 201.
- [11] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 064 901.
- [12] *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 84(3). P. 037 201.
- [13] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [14] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5183.