

УДК 51-77,530.182

## ВОЗБУЖДЕНИЕ И ПОДАВЛЕНИЕ ХИМЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ СЕТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С НЕЛОКАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2017 г. В. А. Максименко<sup>1, \*</sup>, М. В. Горемыко<sup>1, 2</sup>, В. В. Макаров<sup>1</sup>, А. Е. Храмов<sup>1</sup>,  
Д. Гош<sup>3</sup>, Б. К. Бера<sup>3</sup>, С. К. Дана<sup>4, 5</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.”

<sup>2</sup>Правительство Саратовской области

<sup>3</sup>Индийский статистический институт, Калькутта, Индия

<sup>4</sup>Индийский институт химической биологии, Калькутта, Индия

<sup>5</sup>Центр изучения сложных систем, Калькутта, Индия

\*E-mail: maximenkovl@gmail.com

Исследовано взаимодействие между ансамблями связанных нелинейных осцилляторов при помощи модели многослойной сети. Обнаружено, что взаимодействие между ансамблем, демонстрирующим химеру, и ансамблем, демонстрирующим как когерентное, так и некогерентное состояния, может приводить как к подавлению химеры и переходу к когерентному или некогерентному состоянию, так и к возбуждению химерного состояния из когерентного или некогерентного состояний соответственно.

DOI: 10.7868/S0367676517010161

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследования коллективного поведения динамических систем в значительной степени связаны с изучением химерных состояний [1–5]. Подобные состояния, характеризующиеся сосуществованием в сети подгрупп когерентных и некогерентных динамических элементов, были впервые обнаружены в 2002 г. в работе [1]. Затем химерные состояния были получены в сетях нелокально связанных нелинейных элементов, описываемых комплексными уравнениями Гинзбурга–Ландау [6], и в сети фазовых осцилляторов Курамото–Сакагучи [7].

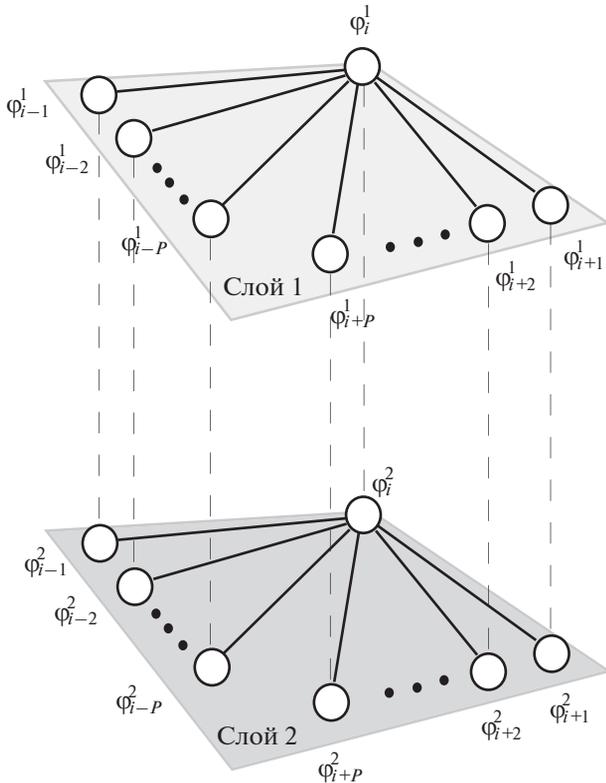
В настоящее время показано, что, наряду с нелокально связанными осцилляторами нарушение симметрии и переход от полностью когерентного состояния к химерному может возникать в сетях осцилляторов с глобальной [8, 9], и локальной связью [10–12]. Кроме того, показано, что химерные состояния могут проявляться в ансамблях динамических элементов различной природы, включая системы, демонстрирующие периодическую и хаотическую динамику [13], нейронные системы [14], дискретные отображения [15] и логические сети [16]. Следует отметить, что наряду с модельными системами реализация химерного состояния в настоящее время экспериментально подтверждается в химических [17], электронных

[18], электрохимических [19], оптоэлектронных [20] и механических [21] системах.

Несмотря на большой интерес к изучению химерных состояний и соответственно большое число работ, посвященных данной проблеме, рассмотрение ограничено, как правило, анализом поведения отдельных сетей и не учитывает эффекты, которые могут возникать в результате их взаимодействия. Среди таких эффектов можно особо отметить анализ устойчивости химерного состояния, реализующегося в сети при ее взаимодействии с сетью когерентных или некогерентных элементов.

В контексте рассмотрения данного вопроса в настоящей работе исследуются химерные состояния во взаимодействующих ансамблях нелокально связанных нелинейных элементов при помощи модели многослойной сети (англ. *multilayer network*). Данная модель в последнее время часто используется как для анализа экспериментальных данных, так и для математического моделирования динамики сетей, что обусловлено соответствием многослойной модели большому числу реальных систем [22, 23].

Особенность многослойной модели — наличие у каждого элемента двух типов связей. Первый тип характеризует взаимодействие элемента с другими узлами сети, находящимися в пределах



**Рис. 1.** Схематическое изображение двухслойной сети осцилляторов с нелокальной связью в пределах слоя (нелокальная связь продемонстрирована на пример  $i$ -го узла). Штрихпунктирные линии соответствуют межслойным связям.

одного слоя. Второй тип определяет связь данного элемента с элементами, относящимися к другим слоям сети. В зависимости от специфики задачи конфигурации связей между элементами многослойной сети могут быть различными. В рамках данной работы будет рассмотрена конфигурация, описанная в нашей недавней работе [24].

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Согласно [24], исследуемая сеть, состоящая из  $N \times M$  элементов, представляется в виде набора из  $M$  слоев (по  $N$  элементов на каждом слое). Связи между элементами внутри слоя распределены нелокально [25] (каждый элемент связан с  $2R$  соседними элементами), взаимодействие между слоями реализуется посредством локальных связей между двумя смежными элементами. Схематически подобная модель изображена на рис. 1.

Величины  $\varphi_i^j$  соответствуют динамическим переменным, характеризующим состояние узла сети (в данном случае мгновенное значение фаз осцилляторов), индексы  $i$  и  $j$  соответствуют порядковому номеру элемента внутри слоя и номеру слоя, соответственно. Сплошными линиями обо-

значены связи элемента  $\varphi_i^j$  с соседними элементами внутри слоя штриховой линией - межслойная связь, реализованная через взаимодействие элемента первого слоя  $\varphi_i^1$  со смежным элементом второго слоя  $\varphi_i^2$ .

Для моделирования динамики узла сети в настоящей работе используется фазовый осциллятор Курамото—Сакагучи (1) [7], который часто применяется как базовая модель для численного и аналитического исследования химерных состояний [26]

$$\frac{d\varphi_i^j}{dt} = \omega_i^j - \frac{\lambda_1}{2R+1} \sum_{k=i-2R}^{i+2R} \sin(\varphi_i^j - \varphi_k^j + \alpha) + \frac{\lambda_2}{M} \sum_{l \neq j} \sin(\varphi_i^j - \varphi_i^l). \quad (1)$$

В соотношении (1)  $\omega_i^j$  соответствует собственной частоте осциллятора,  $\lambda_1$  - коэффициент связи между осцилляторами внутри слоя,  $\lambda_2$  - коэффициент межслойной связи,  $R$  - радиус связи,  $M$  - число слоев,  $\alpha$  - постоянный фазовый сдвиг. В работе рассматривается сеть идентичных осцилляторов  $\omega_i^j = 1, \forall i, j$ .

Для количественной диагностики химерного состояния в настоящей работе рассчитывается величина  $S_I$  (2), характеризующая степень некогерентности (англ. *strength of incoherent*). Для расчета данной величины исследуемый ансамбль осцилляторов разбивается на  $m$  групп элементов по  $n$  элементов в группе. Для данного ансамбля  $S_I$  определяется как

$$S_I = 1 - \frac{\sum_{r=1}^m \Theta(\delta - \sigma_r)}{m}, \quad (2)$$

где  $\Theta(\cdot)$  - функция Хевисайда,  $\sigma_r$  - описывает стандартное отклонение (3), характеризующее осцилляторы в группе с индексом  $r$ ,  $\delta = 0.035$  - пороговое значение. Величина  $\sigma_r$  рассчитывается для каждой группы при помощи соотношения

$$\sigma_r = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{s=n(r-1)+1}^m [\varphi_s - \Phi]^2} \right\rangle, \quad (3)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  обозначает усреднение по временному интервалу,  $\Phi$  - средняя фаза по ансамблю.

В зависимости от значения величины  $S_I$  состояние сети можно трактовать как полностью когерентное  $S_I = 0$ , полностью некогерентное  $S_I = 1$  или химерное  $0 < S_I < 1$ , соответствующее сосуществованию когерентного и некогерентного кластеров.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для изучения процессов возбуждения и подавления химерного состояния поведение многослойной сети исследовалось численно. При этом значения параметров, характеризующих узлы сети и ее топологию, были выбраны идентичными для каждого слоя.

В качестве управляющего параметра, характеризующего слой сети, рассматривалась величина  $\alpha$ , характеризующая фазовое соотношение между взаимодействующими осцилляторами данного слоя. В результате предварительных исследований динамики сети фазовых осцилляторов Курамото–Сакагучи было показано, что монотонное изменение параметра  $\alpha$  позволяет наблюдать последовательный переход от когерентного состояния ( $\alpha < 1.45$ ) к химерному ( $\alpha \in [1.45–1.57]$ ) и затем к некогерентному ( $\alpha > 1.57$ ).

С учетом приведенных соотношений для анализа взаимодействия между химерным и когерентным состояниями значения параметра  $\alpha$  были выбраны как  $\alpha_1 = 1.45$  и  $\alpha_2 = 1.2$ , для взаимодействия между химерным и некогерентным состоянием –  $\alpha_1 = 1.45$  и  $\alpha_2 = 1.7$  соответственно.

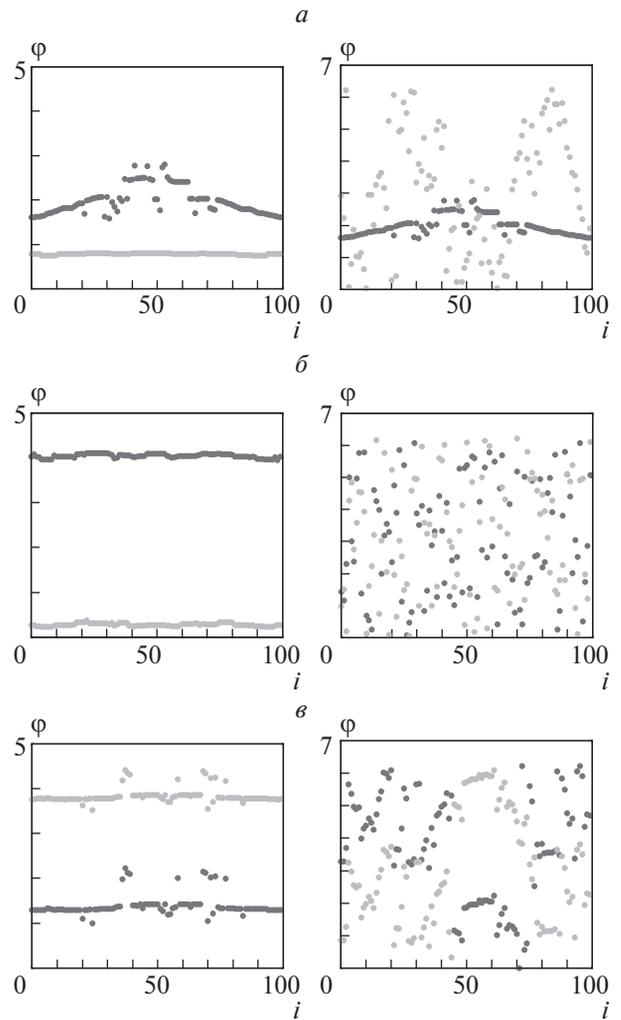
Моментальные распределения фаз осцилляторов для заданных значений параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в случае, когда межслойная связь отсутствует, показаны на рис. 2а. Левая колонка соответствует случаю, когда на первом слое реализуется химерное состояние, а на втором слое – когерентное, правая – химерному и некогерентному состояниям на слоях соответственно. Начальные значения фаз осцилляторов в обоих случаях распределены по следующим законам:

$$\varphi_i^1(0) = \begin{cases} \pi\left(\frac{4i}{N} - 1\right), & i \in [0, \frac{N}{2}], \\ \pi\left(3 - \frac{4i}{N}\right), & i \in [\frac{N}{2} + 1, N]. \end{cases} \quad (4)$$

$$\varphi_i^2(0) = \begin{cases} \pi\left(1 - \frac{4i}{N}\right), & i \in [0, \frac{N}{2}], \\ \pi\left(\frac{4i}{N} - 3\right), & i \in [\frac{N}{2} + 1, N]. \end{cases}$$

В обоих случаях к начальному распределению добавлена шумовая добавка.

На рис. 2б, 2в показаны моментальные распределения фаз осцилляторов первого и второго слоев для случая слабой ( $\lambda_2 = 0.2$ ) и сильной ( $\lambda_2 = 0.5$ ) межслойной связи соответственно. Видно, что в случае слабой межслойной связи происходит подавление химеры в первом слое и наблюдается переход к когерентному или некогерентному состояниям в зависимости от начального состояния осцилляторов второго слоя (рис. 2б). При увеличении значения параметра  $\lambda_2$  наблюдаются интересные особенности в динамике данной системы. Из рис. 2в видно, что химерное состояние на пер-



**Рис. 2.** Моментальные распределения фаз осцилляторов на слоях для случая отсутствия межслойного взаимодействия  $\lambda_2 = 0$ , слабого  $\lambda_2 = 0.2$  и сильного взаимодействия  $\lambda_2 = 0.5$ . Левая колонка соответствует случаю, когда на первом слое реализуется химерное состояние, а на втором слое – когерентное, правая – химерному и некогерентному состояниям соответственно.

вом слое оказывается устойчивым. При этом также наблюдается возбуждение химерного состояния в ансамбле осцилляторов второго слоя в случае как изначально когерентной, так и некогерентной динамики.

Следует отметить, что в результате сильного межслойного взаимодействия сеть приходит к устойчивому состоянию, характеризующемуся синхронной динамикой ее слоев (на обоих слоях устанавливаются одинаковые распределения фаз осцилляторов). Интересно, что наличие многослойной структуры увеличивает область параметров, при которых возможна реализация химерного состояния. Можно с высокой степенью вероятно-

сти предполагать, что обнаруженная закономерность остается справедливой для широкого класса сетей с многослойной структурой, в которых возможна реализация химерных состояний.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована динамика двухслойной сети не-локально связанных фазовых осцилляторов Курamoto–Сакагучи. Рассмотрены случаи, когда ансамбль осцилляторов, принадлежащих одному слою, демонстрирует химерное состояние, в то время как осцилляторы другого слоя – когерентное или некогерентное состояние. Показано, что при малых значениях силы межслойной связи наблюдаются подавление химерного состояния в первом слое и переход всех осцилляторов сети в когерентное или некогерентное состояние (в зависимости от состояния, реализованного во втором слое сети). В случае больших значений силы межслойного взаимодействия обнаруживается возбуждение химерного состояния в ансамбле осцилляторов второго слоя как из полностью когерентного, так и некогерентного состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 16-32-00334, 15-52-45003) и Министерства образования и науки РФ (задания 3.23.2014/К и 931). В.А. Максименко выражает благодарность Фонду “Династия” за персональную поддержку.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2002. V. 4. P. 380.
2. Abrams D.M., Strogatz S.H. // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 174102.
3. Sethia G.C. et al. // *Phys. Rev. E.* 2013. V. 88. P. 042917.
4. Omelchenko I. et al. // *Chaos.* 2015. V. 25. P. 083104.
5. Mishra A. et al. // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 92. P. 62920.
6. Strogatz S.H., Stewart I. // *Sci. Amer.* 1993. V. 12. P. 68.
7. Sakaguchi H., Kuramoto Y. // *Prog. Theor. Phys.* 1996. V. 76. P. 576.
8. Schmidt L. et al. // *Chaos.* 2014. V. 24. P. 013102.
9. Sethia G.C., Sen A. // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 112. P. 144101.
10. Bera B.K. et al. // *Phys. Rev. E.* 2016. V. 93. P. 012205.
11. Laing C.R. // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 92. P. 050904.
12. Li B.-W., Dierckx H. // *Phys. Rev. E.* 2016. V. 93. P. 020202.
13. Gu C. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. P. 134101.
14. Hizanidis J. et al. // *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 2014. V. 24. P. 1450030.
15. Omelchenko I. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 106. P. 234102.
16. Rosin D.P. et al. // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 90. P. 030902.
17. Tinsley M.R. et al. // *Nat. Phys.* 2012. V. 8. P. 662.
18. Larger L. et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 111. P. 054103.
19. Wickramasinghe M., Kiss I.Z. // *PLoS ONE.* 2013. V. 8. P. e80586.
20. Hagerstrom A. et al. // *Nat. Phys.* 2012. V. 8. P. 658.
21. Martens E.A. et al. // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* V. 110. P. 10563.
22. Kivela M. et al. // *J. Complex Networks.* 2014. V. 2. P. 203.
23. Boccaletti S. et al. // *Phys. Rep.* 2014. V. 544. P. 1-122.
24. Makarov V.V. et al. // *Chaos. Solitons & Fractals.* 2016. V. 84. P. 23.
25. Bera B. et al. // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 93. P. 012205.
26. Omel'chenko O.E., Wolfrum M. // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 109. P. 164101.