

УДК 517.9, 530.182, 533.9

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

© 2014 г. Н. С. Фролов<sup>1</sup>, В. А. Максименко<sup>1,2</sup>, К. В. Ильенко<sup>1</sup>,  
А. А. Короновский<sup>1,2</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>

*E-mail: hramovae@gmail.com*

Предложен метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно распределенных пучково-плазменных систем, моделируемых с помощью метода крупных частиц. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примере эталонной системы электронной природы – диода Пирса и модели низковольтного виркатора – источника широкополосного СВЧ-излучения.

DOI: 10.7868/S036767651402015X

### ВВЕДЕНИЕ

Показатели Ляпунова – это мощный математический инструмент для анализа сложной нелинейной динамики систем различной природы [1]. Однако, эффективное применение данного инструмента ограничено в основном системами с малым числом степеней свободы [2]. В то же самое время широкий класс реальных систем и объектов описывается с помощью распределенных в пространстве динамических переменных. В частности, пространственно распределенные модели широко используются для анализа процессов, проходящих в устройствах и приборах вакуумной, плазменной и полупроводниковой электроники СВЧ- и ТГц-диапазонов [3–5]. Проблема применения ляпуновских показателей в данном случае связана с тем, что существующие алгоритмы расчета, успешно применяемые для систем с малым числом степеней свободы, не подходят для анализа систем с бесконечномерным фазовым пространством. Алгоритм расчета показателей Ляпунова для пространственно распределенных пучково-плазменных систем, предложенный в работе [6], ограничивается рассмотрением только моделей вида сплошной среды (например, в рамках гидродинамического описания электронного потока), что не позволяет провести анализ спектров показателей Ляпунова для широкого класса систем, описываемых методами частиц. При моделировании

таких систем в нелинейных режимах работы типичны обгоны и отражения частиц, что делает неэффективным гидродинамическое описание. Вместе с тем подобные системы – это важный класс электронных и плазменных систем: усилителей и генераторов электромагнитного излучения, которые демонстрируют широкий класс нелинейных процессов, что делает актуальным изучение количественных характеристик их нелинейной динамики [7–10].

В данной работе впервые предложен метод расчета спектра показателей Ляпунова для пространственно распределенных пучково-плазменных систем, моделируемых с помощью метода крупных частиц. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примере как эталонной системы электронной природы – диода Пирса [7, 11], так и модели низковольтного виркатора – перспективного источника широкополосного СВЧ-излучения [3, 12].

### ИССЛЕДУЕМАЯ СИСТЕМА И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Диод Пирса, выбранный в качестве базового объекта исследования, – это одна из простейших моделей электронно-плазменной природы. Несмотря на это данная система способна демонстрировать различные нелинейные явления, в том числе хаотические колебания и образования структур [7, 11, 13]. Диод Пирса представляет собой пространство взаимодействия, образованное двумя заземленными сеточными электродами, пронизываемое моноэнергетическим на входе пучком электронов. Межсеточное пространство заполнено нейтрализующим ионным газом с плотностью, равной невозмущенной плотности заряда электронного потока.

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина.

<sup>3</sup> Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова Национальной академии наук Украины, Харьков.

В данной работе рассматривается динамика электронного пучка в диоде Пирса в режиме формирования виртуального катода (ВК). В этом случае в электронном потоке возникает отражение частиц, и его описание в рамках гидродинамической модели невозможно, поэтому при исследовании сложной нелинейной динамики колебаний нестационарного виртуального катода используется численное моделирование с помощью метода “частиц в ячейке” [14]. Математическая модель, основанная на методе частиц, в безразмерных переменных имеет вид (см., например, работы [15–17])

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = -E(x_i), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 (\rho(x_i) - \rho_{ion}), \quad (2)$$

где  $E$  – напряженность поля,  $x_i$  – координата  $i$ -го заряженного листа,  $\varphi$  – потенциал поля пространственного заряда,  $\rho(x_i)$  – плотность пространственного заряда в узле с координатой  $x_i$ ,  $\rho_{ion}$  – плотность нейтрализующего ионного газа,  $\alpha = \omega_p L / v_0$  – параметр Пирса ( $L$  – длина межсеточного пространства,  $v_0$  – невозмущенная скорость электронов). Уравнение (2) дополняется граничными условиями для потенциала на сетках диода Пирса  $\varphi(x=0) = \varphi(x=1) = 0$ .

В классическом диоде Пирса  $\rho_{ion} = 1$ , именно такой случай мы и рассматриваем в данной работе. В рамках описанной модели можно также описать динамику низковольтного виркатора – вакуумного прибора электроники СВЧ, в котором ВК формируется как за счет действия сил пространственного заряда, так и за счет дополнительного торможения пучка в пространстве дрейфа [3, 16, 18, 19]. Простейшая модель низковольтного виркатора описывается теми же уравнениями (1)–(3), однако ионный фон отсутствует  $\rho_{ion} = 0$ , а граничные условия для потенциала модифицируются к следующему виду:  $\varphi(x=0) = 0$ ,  $\varphi(x=1) = -\Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi$  – величина тормозящей разности потенциалов. В данной статье в качестве второго примера мы рассмотрим динамику спектра ляпуновских показателей в модели низковольтного виркатора.

#### МЕТОД РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Как известно, для расчета спектра показателей Ляпунова наряду с динамикой основного состояния системы необходимо рассматривать набор малых возмущений этого состояния. Применение подходов, использованных ранее для анализа гидродинамической модели пучково-плазменных систем [6, 20], в данном случае затруднительно в связи с тем, что состояние системы характеризуется как непрерывно распределенными в пространстве величинами, так и набором дискретных ча-

стиц. Основные сложности связаны с заданием возмущения и получением линеаризованных уравнений, описывающих динамику дискретного набора частиц. Вместе с тем существует возможность расчета линейных возмущений с помощью вариаций в рамках уравнений, описывающих пучок в рамках модели сплошной среды [21]. Рассмотрим данный подход более подробно.

В качестве состояния системы, следуя [6], выберем набор пространственно-временных распределений  $U(x,t) = (\rho(x,t), v(x,t))^T$ . При этом для расчета первых  $N$  показателей в рассмотрении введем набор возмущений плотности и скорости  $V_i(x,t) = (\xi_i^v(x,t), \xi_i^p(x,t))^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ , удовлетворяющих условию нормировки и ортогональности. Такой набор возмущений можно получить с помощью стандартной процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта [1]. Отметим, что распределение потенциала и его возмущения исключены из состояния системы, так как эти величины однозначно выражаются через плотность заряда с помощью уравнения Пуассона [6].

Как отмечено выше, особенностью метода является использование системы линеаризованных в окрестности состояния  $U(x, t)$  уравнений сплошной среды (гидродинамических уравнений) для описания динамики во времени и пространстве возмущений. Совместное решение исходных уравнений модели (1)–(3) для нахождения опорного состояния и линейных гидродинамических уравнений для возмущений дает возможность оценить спектр показателей Ляпунова. Для этого по истечении некоторого периода времени длительностью  $T$ , подбираемого эмпирически, набор возмущений  $V_i(x, t)$  подвергается процедуре ортогонализации Грамма–Шмидта. Данная процедура повторяется  $M$  раз, после чего подсчитываются суммы  $S_i = \sum_{j=1}^M \ln \|\tilde{V}_i(x, jT)\|$ , где  $\tilde{V}_i(x, jT)$  – распределение  $i$ -го возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Значения показателей Ляпунова определяются как [6]

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}. \quad (3)$$

Применение описанного подхода к анализу динамики электронного потока в рассматриваемых системах показало высокую эффективность данного метода при получении количественной оценки хаотического поведения пространственно-распределенных пучково-плазменных систем.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим результаты расчета спектра показателей Ляпунова для рассматриваемых модельных систем. Начнем рассмотрение с диода Пирса, для которого хорошо известно, что в диапазоне управляющего параметра Пирса  $\alpha = [\pi, 2\pi]$  в си-

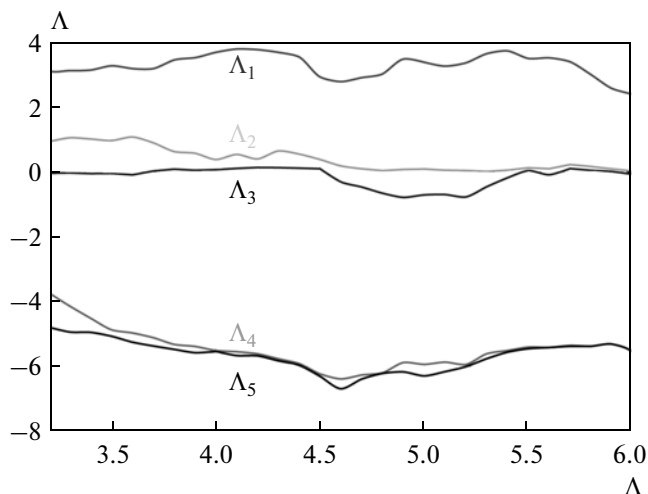


Рис. 1. Зависимость пяти старших показателей Ляпунова от управляющего параметра  $\alpha$  для диода Пирса.

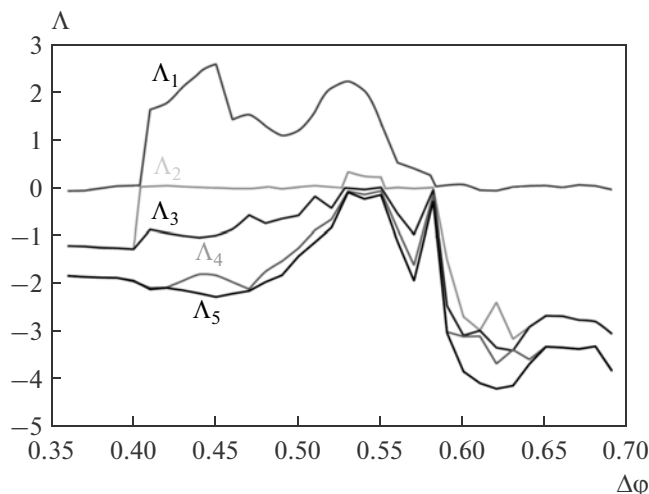


Рис. 2. Зависимость пяти старших показателей Ляпунова от управляющего параметра  $\Delta\phi$  для модели низковольтного виркатора, построенная при  $\alpha = 0.9$ .

стеме формируется ВК и динамика пучка характеризуется сложными нерегулярными колебаниями во всем диапазоне изменения управляющего параметра. В построенном для данного случая спектре показателей Ляпунова (рис. 1) присутствуют положительные показатели, что соответствует хаотической динамике. Интересен тот факт, что при  $\alpha < 4.7$  в системе реализуется режим гиперхаоса, которому соответствуют два положительных показателя Ляпунова, что хорошо согласуется с известными результатами: сложность колебаний в диоде Пирса уменьшается с ростом параметра Пирса.

Результаты расчета спектра показателей Ляпунова для низковольтного виркатора при изменении тормозящего потенциала и фиксированного параметра Пирса  $\alpha < 0.9$  представлены на рис. 2. Полученный спектр показателей Ляпунова отражает характер поведения системы при изменении тормозящей разности потенциалов. Видно, что в данном случае электронный пучок демонстрирует как периодическую ( $0.36 < \Delta\phi < 0.41$  и  $0.58 < \Delta\phi < 0.69$ ), так и хаотическую ( $0.4 < \Delta\phi < 0.58$ ) динамику при варьировании величины тормозящего поля в пространстве взаимодействия. Кроме того, в области  $0.53 < \Delta\phi < 0.55$  система переходит в режим гиперхаоса, о чем свидетельствует наличие двух положительных показателей в спектре. Полученные результаты расчета спектра показателей Ляпунова находятся в хорошем согласии с другими методами теоретического и экспериментального анализа динамики виркатора, приведенными в работах [3, 16, 18, 19, 22]. В частности, режим гиперхаоса соответствует наиболее сложному режиму колебаний в системе, периодические режимы также наблюдаются при малых и больших тормозящих потенциалах.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен вопрос о расчете спектра показателей Ляпунова для пространственно распределенных пучково-плазменных систем, моделируемых при помощи метода крупных частиц (PIC-метода). В качестве исследуемых объектов были выбраны эталонная система электронной природы – диод Пирса в режиме формирования ВК и низковольтный виркатор. Несмотря на то что поведение такой системы описывается методом крупных частиц, для моделирования динамики малых возмущений основного состояния можно использовать линейаризованные в окрестности опорной траектории гидродинамические уравнения. Таким образом, моделируя совместно динамику системы и малых возмущений, а также применяя ортогонализацию Грамма–Шмидта, рассчитаны спектры показателей Ляпунова для модельных систем. Впервые показано, что в зависимости от величины тормозящего потенциала рассматриваемая система может демонстрировать как периодическую динамику, так и сложные хаотические режимы, включая гиперхаос.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашения 14.В37.21.0764 и 14.В37.21.0751), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых – докторов наук (МД-345.2013.2), а также РФФИ (проекты № 12-02-33071, 13-02-01209 и 13-02-90406).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
2. Bennetin G. et al. // Theory Meccanica. 1980. V. 15. P. 9.

3. Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы / Под ред. Короновского А.А., Трубецкого Д.И., Храмова А.Е. М.: Физматлит, 2009.
4. *Goryashko V.A. et al.* // Phys. Rev. ST. 2009. V. 12. 100701.
5. *Hramov A.E. et al.* // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. 112101.
6. *Hramov A.E. et al.* // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. 082302.
7. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ-электронике для физиков. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
8. *Nusinovich G.S. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. 218301.
9. *Dmitriev B.S. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 074101.
10. *Klinger T. et al.* // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 1961.
11. Афиногентов В.Г. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2. № 5 С. 69.
12. Калинин Ю.А. и др. // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 11. P. 1009.
13. *Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1553.
14. *Birdsall C., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. N.Y.: McGraw-Hill, 1985.
15. *Hramov A.E. et al.* // Chaos. 2006. V. 16. 013123.
16. *Егоров Е.Н. и др.* // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 1. С. 51.
17. *Filatov R.A. et al.* // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. 033106.
18. *Егоров Е.Н., Короновский Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2005. Т. 69. № 12. С. 1724; *Egorov E.N., Koronovskii Yu.A., Levin Yu.I., Trubetskoy D.I., Khramov A.E.* // Bull. Russ. Acad. Sci.: Physics. 2005. V. 69. № 12. P. 1921.
19. *Калинин Ю.А. и др.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 11. P. 1009.
20. *Filatova A.E. et al.* // Chaos. 2008. V. 18. 023133.
21. *Roach P.J.* Computational fluid dynamics. Hermosa. Albuquerque, 1976.
22. *Фокин А.С., Стародубов А.В., Кузнецов Н.Н., Калинин Ю.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2012. Т. 76. № 12. С. 1489; *Fokin A.S., Starodubov A.V. Kuznetsov N.N., Kalinin Yu.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci.: Physics. 2012. V. 76. № 12. P. 1333.