

УДК 517.9+530.182+533.9

АНАЛИЗ СИНХРОННОЙ ДИНАМИКИ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ НА ВИРТУАЛЬНОМ КАТОДЕ С ПОМОЩЬЮ РАСЧЁТА СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

Г. В. Осипов^{1*}, Н. С. Фролов^{1,2,3}

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород;

² Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, г. Саратов;

³ Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Описан подход, позволяющий в рамках метода крупных частиц проанализировать обобщённую синхронизацию однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде. Для подтверждения результатов исследования проведена диагностика обобщённой синхронизации методом вспомогательной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Хаотическая синхронизация в распределённых пучково-плазменных системах представляет собой важное фундаментальное явление в современной радиофизике и сверхвысокочастотной (СВЧ) электронике [1]. Применение хаотической синхронизации на практике возможно при разработке способов управления сложной динамикой СВЧ приборов и создании устройств для скрытой передачи данных [2, 3]. Одним из наиболее интересных и важных для исследования типов синхронизации является обобщённая синхронизация [4, 5]. Как было показано ранее [6], установление обобщённой синхронизации возможно при взаимодействии генераторов на виртуальном катоде — перспективных источников мощного широкополосного СВЧ излучения [7, 8]. Однако подробный анализ процессов, протекающих в связанных системах и приводящих к переходу к синхронной динамике, требует разработки и применения новых эффективных подходов к диагностике синхронизации. В частности, одной из наиболее эффективных методик, позволяющих дать количественную оценку поведению автономных и связанных динамических систем, в том числе и пучково-плазменной природы, является расчёт спектра показателей Ляпунова [9–11]. В представленной работе рассматриваются аспекты применения этой методики к численному моделированию однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде для диагностики режима обобщённой синхронизации.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Численный расчёт динамики генератора на виртуальном катоде в рамках одномерной квазиэлектростатической модели электронного пучка, пронизывающего межсеточное пространство, основывается на совместном решении уравнений движения каждой крупной частицы и уравнения Пуассона для определения распределения потенциала φ в пространстве дрейфа электронного потока [1, 7]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = E(x), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\alpha^2\rho(x), \quad E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha = \omega_p L/v_0$ — безразмерный параметр Пирса, ω_p — плазменная частота пучка, L — длина пространства дрейфа, v_0 — скорость на входе в пространство дрейфа. Система (1) дополняется

* grosipov@gmail.com

граничными условиями для уравнения Пуассона в виде $\varphi(0, t) = 0$ и $\varphi(1, t) = \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между сетками диодного промежутка, создающая дополнительное тормозящее поле. Величины α и $\Delta\varphi$ являются основными управляющими параметрами, влияющими на динамику системы. Следует отметить, что все уравнения, используемые в численной модели, представлены в безразмерном виде (связь между размерными и безразмерными величинами можно найти, например, в работах [1, 6, 7]).

Соотношение между плотностью пространственного заряда ρ и положением крупных частиц в пространстве определяется процедурой билинейного взвешивания частиц в узлах пространственной сетки:

$$\rho(x_j) = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \Theta(x_i - x_j), \quad (2)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 - x/\Delta x, & |x| \leq \Delta x; \\ 0, & |x| > \Delta x. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь x_j — координата j -го узла пространственной сетки, x_i — координата i -ой крупной частицы, Δx — шаг пространственной сетки, N_c — количество частиц в ячейке в невозмущённом состоянии, N_p — полное количество частиц в системе.

Внешнее воздействие заключается в предварительной скоростной модуляции электронного потока внешним сигналом на входе в пространство дрейфа [6, 12]. Ввод и вывод мощности в такой виркаторной системе осуществляется с помощью отрезков спиральной электродинамической структуры. Возбуждение выходного отрезка электронным пучком можно описать с помощью телеграфных уравнений, если представить его как отрезок длинной линии из последовательно соединённых индуктивностей L и шунтирующих ёмкостей C [8].

Аналогично проводится расчёт модулирующего отрезка, однако в данном случае не учитывается обратное воздействие потока на спиральную систему. В случае связанных генераторов на виртуальном катоде коэффициент связи определяется отношением мощности, поступающей на вход ведомого генератора, к выходной мощности ведущего генератора.

2. РАСЧЁТ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Для расчёта спектра N старших показателей Ляпунова для системы, состоящей из двух однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде, используется описанный в работе [13] подход, основанный на параллельном расчёте опорного состояния $U(x, t)$ и набора N малых возмущений. При этом эволюция опорного состояния описывается методом крупных частиц, а эволюция возмущений — линеаризованным в окрестности опорного состояния оператором сплошной среды, включающим в себя линеаризованные уравнения движения, непрерывности и Пуассона:

$$\frac{\partial \xi_\rho}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x} - \xi_\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \rho \frac{\partial \xi_v}{\partial x} - \xi_v \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \xi_v}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial \xi_v}{\partial x} - \xi_v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_\varphi}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\varphi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \xi_\rho. \quad (6)$$

Здесь ξ_ρ , ξ_v и ξ_φ — возмущения плотности пространственного заряда, скорости и потенциала соответственно, а \bar{v} — средняя скорость опорного состояния пучка в j -м узле, которая определяется

формулой

$$\bar{v}(x_j) = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_p} \Phi(x_j - x_i), \quad (7)$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} v_i, & |x| \leq \Delta x/2; \\ 0, & |x| > \Delta x/2. \end{cases} \quad (8)$$

Состояние связанной системы будет определяться вектором $U(x, t) = [\rho_d(x, t), \bar{v}_d(x, t), \rho_r(x, t), \bar{v}_r(x, t)]^T$, где величины с индексом «d» соответствуют ведущей системе, а величины с индексом «r» — ведомой, индекс «T» обозначает транспонирование. Для учёта связи при расчёте возмущений необходимо дополнить линеаризованные уравнения сплошной среды линейными телеграфными уравнениями для описания возмущения в спиральных электродинамических структурах.

Расчёт спектра показателей Ляпунова для связанных систем позволяет выявлять наличие режима обобщённой синхронизации. Такой тип синхронизации подразумевает установление функционального отношения между состояниями взаимодействующих систем, $U_r = f(U_d)$, где U_r и U_d — состояния ведомой и ведущей системы соответственно. Критерием наличия обобщённой синхронизации в системе однонаправлено связанных колебательных систем является переход через ноль «сверху» старшего показателя Ляпунова ведомой системы $\lambda_r^{(1)}$ и его отрицательность [9, 14]. На рис. 1 представлен спектр нескольких старших показателей Ляпунова для системы однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде по величине коэффициента связи. Взаимодействующие генераторы настроены на разные динамические режимы: ведущий генератор демонстрирует гиперхаотическую динамику (с двумя положительными ляпуновскими экспонентами), а ведомый — хаотическую (с одной положительной ляпуновской экспонентой). В данном случае переход к режиму синхронной динамики осуществляется при коэффициенте связи $\varepsilon = 0,1$, когда старший показатель Ляпунова ведомой системы становится отрицательным.

Результаты, полученные с помощью расчёта спектра показателей Ляпунова, подтверждаются и другими методами диагностики обобщённой синхронизации. В частности, для проверки адекватности предложенного подхода был использован метод вспомогательной системы [15], в котором в рассмотрение включается вспомогательная система, идентичная ведомой, но с другими начальными условиями. В этом случае о наличии синхронизации можно говорить, если разность между состояниями U_r ведомой и U_a вспомогательной систем стремится к нулю. Определим состояние каждой из этих систем как $U_r(x, t) = [\rho_r(x, t), \bar{v}_r(x, t)]^T$ и $U_a(x, t) = [\rho_a(x, t), \bar{v}_a(x, t)]^T$. Тогда

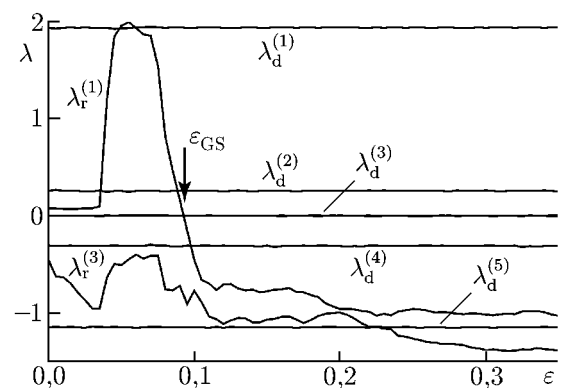


Рис. 1. Спектр старших показателей Ляпунова для системы однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде. Спектру ведущего генератора соответствуют неизменяющиеся при варьировании параметра связи ε показатели Ляпунова, спектру ведомого — изменяющиеся. Параметры взаимодействующих генераторов: $\Delta\varphi_d = 0,50$; $\Delta\varphi_d = 0,43$; $\alpha_d = \alpha_r = 0,90$; ε_{GS} — пороговое значение параметра связи, при котором в системе однонаправленных генераторов на виртуальном катоде устанавливается обобщённая синхронизация

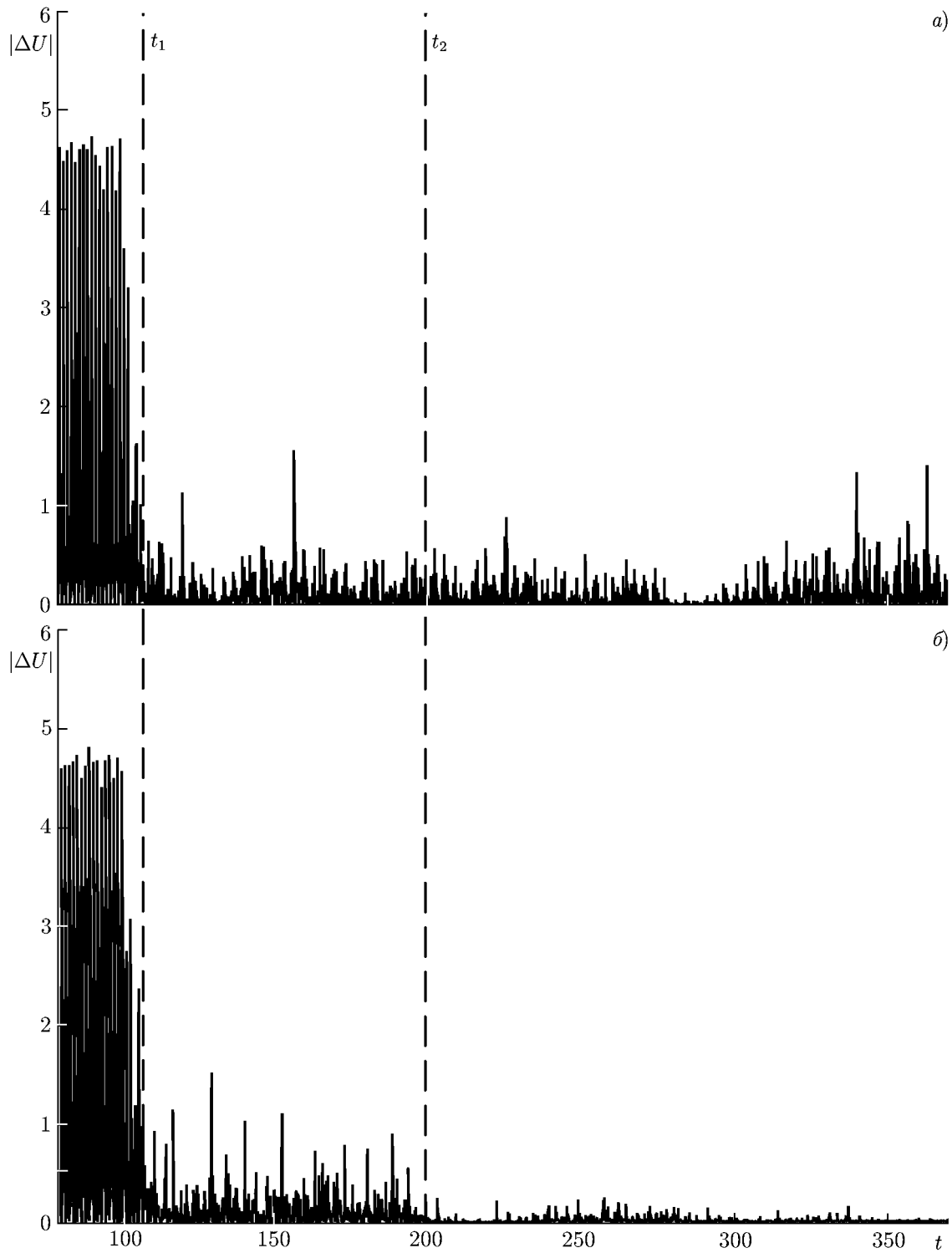


Рис. 2. Зависимость модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем от времени. Пунктирными линиями отмечены времена включения связи между взаимодействующими системами t_1 и завершения переходного процесса t_2 . Разность состояний построена для коэффициентов связи допорогового, $\varepsilon = 0,08$ (а), и порогового, $\varepsilon = 0,1$ (б), значений

$$|\Delta U| = \|U_r\| - \|U_a\| = \left| \int_0^1 \sqrt{\rho_r^2(x, t) + \bar{v}_r^2(x, t)} dx - \int_0^1 \sqrt{\rho_a^2(x, t) + \bar{v}_a^2(x, t)} dx \right|. \quad (9)$$

На рис. 2 приведены зависимости модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|\Delta U|$ от времени до и после порога установления синхронизации. Видно, что в первом случае после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем не являются эквивалентными, в отличие от второго случая, когда разность между состояниями рассматриваемых систем близка к нулю.

Таким образом, в работе была предложена модификация метода расчёта спектра показателей Ляпунова для связанных пучково-плазменных систем, моделируемых в рамках метода крупных частиц, на примере системы однонаправлено связанных генераторов на виртуальном катоде. Было показано, что в такой системе возможно установление обобщённой синхронизации, происходящее при переходе через ноль «сверху» старшего показателя Ляпунова ведомой системы. Предложенный подход для диагностики синхронизации был подтверждён в рамках метода вспомогательной системы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (соглашение 14-12-00811, раздел 2), РФФИ (гранты 14-02-31204, 13-02-90406, разделы 1, 3), а также Совета по грантам президента РФ для поддержки молодых российских учёных-кандидатов наук (МК-818.2013.2, разделы 1, 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
2. Залогин Н. Н., Кислов В. В. Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006.
3. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
4. Filatov R. A., Hramov A. E., Koronovskii A. A. // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301.
5. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, No. 2. P. 980.
6. Короновский А. А., Москаленко О. И., Павлов А. С. и др. // ЖТФ. 2014. Т. 84, № 5. С. 1.
7. Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е. и др. // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
8. Егоров Е. Н., Калинин Ю. А., Короновский А. А. и др. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 9. С. 71.
9. Ruyagas K. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, No. 5. P. 5183.
10. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Maksimenko V. A., et al. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19, No. 8. Art. no. 082302.
11. Hramov A. E., Rempen I. S. // Int. J. Electron. 2004. V. 91, No. 1. P. 1.
12. Phrolov N. S., Koronovskii A. A., Kalinin Ju. A., et al. // Phys. Lett. A. 2014. V. 378, No. 32-33. P. 2423.
13. Фролов Н. С., Максименко В. А., Ильенко К. и др. // Изв. РАН. Сер. физическая. 2014. Т. 78, № 2. С. 237.
14. Hramov A. E., Koronovskii A. A. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71, No. 6. Art. no. 067201.
15. Abarbanel H. D., Rulkov N. F., Sushchik M. M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528.

Поступила в редакцию 12 ноября 2014 г.; принята в печать 12 января 2015 г.

**THE ANALYSIS OF SYNCHRONOUS DYNAMICS OF COUPLED VIRTUAL
CATHODE OSCILLATORS BY MEANS OF LYAPUNOV EXPONENTS
SPECTRUM**

G. V. Osipov and N. S. Frolov

We present the approach to analyse the generalized synchronization between unidirectionally coupled virtual cathode oscillators simulated in the framework of particle-in-cell method. We used one of the most effective methods of generalized synchronization diagnostics - the auxiliary system method - to prove the results obtained by the presented approach.