

Краткие сообщения

01

Переменяемость переменяемостей на границе фазовой синхронизации в присутствии шума

© О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов, М.О. Журавлев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
410054 Саратов, Россия

e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

(Поступило в Редакцию 9 августа 2013 г. В окончательной редакции 16 июля 2014 г.)

Проведено исследование переменяющегося поведения на границе фазовой синхронизации в присутствии шума. Показано, что в определенном диапазоне значений параметра связи и интенсивности шума в системе имеет место переменяемость переменяемостей „игольного ушка“ и „кольца“. Основные результаты проиллюстрированы на примере двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера.

Одним из наиболее распространенных явлений в природе является переменяемость [1]. Она характерна для широкого круга нелинейных систем, включая физические, физиологические и биологические системы (см., например, [2–6]). В настоящее время различают несколько типов переменяемости. Это, прежде всего, переменяемость типов I–III [1], „on-off“-переменяемость [7], переменяемость „игольного ушка“ [4,8] и переменяемость „кольца“ [9]. Несмотря на различные механизмы, приводящие к возникновению вышеупомянутых типов переменяемости и их различные статистические характеристики, во всех известных случаях во временной реализации системы при фиксированных значениях управляющих параметров, как правило, два типа поведения последовательно сменяют друг друга. Позднее было обнаружено, что при некоторых условиях, например, на границе фазовой синхронизации неавтономных и связанных хаотических осцилляторов или систем, демонстрирующих периодическую динамику, в присутствии шума, в определенном диапазоне временных масштабов наблюдения возможно одновременное существование сразу двух типов переменяющегося поведения. Подобный режим был назван „переменяемостью переменяемостей“ [10]. Он представляет собой принципиально новый уровень сложности в динамике нелинейных систем, и, как следствие, вызывает растущий интерес у исследователей.

В работе [10] была построена общая теория сосуществования двух типов переменяемости в нелинейных системах. Для случая переменяемости переменяемостей игольного ушка (типа I в присутствии шума в закритической области значений управляющего параметра) и кольца были получены аналитические выражения для распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющего параметра и зависимости средней длительности ламинарных фаз

от параметра надкритичности. Было также показано, что данные численного моделирования хаотических осцилляторов и систем, демонстрирующих периодическую динамику, в присутствии шума, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, в определенном диапазоне временных масштабов находятся в отличном соответствии с результатами теоретических предсказаний.

В настоящей работе проводится исследование возможности существования переменяемости переменяемостей в хаотических системах, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации, в присутствии шума. Как будет показано ниже, при превышении шумом некоторого значения (зависящего от выбора исследуемой системы, ее управляющих параметров и характеристик шумового сигнала) в определенном диапазоне значений управляющего параметра наблюдается одновременное существование переменяемостей игольного ушка и кольца.

Рассмотрим характеристики переменяемости переменяемостей вблизи границы фазовой синхронизации в присутствии шума на примере двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, & \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2 + D\xi, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\mathbf{x}_{1,2}(t) = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$ — векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, $\omega_1 = 0.93$, $\omega_2 = 0.95$ — управляющие параметры, ξ — случайный гауссов процесс с нулевым средним и единичной дисперсией, D — интенсивность шумового воздействия. Для интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (1) использовался метод Рунге–Кутты 4 порядка, адаптированный для стохастических дифференциальных уравнений [11] с шагом

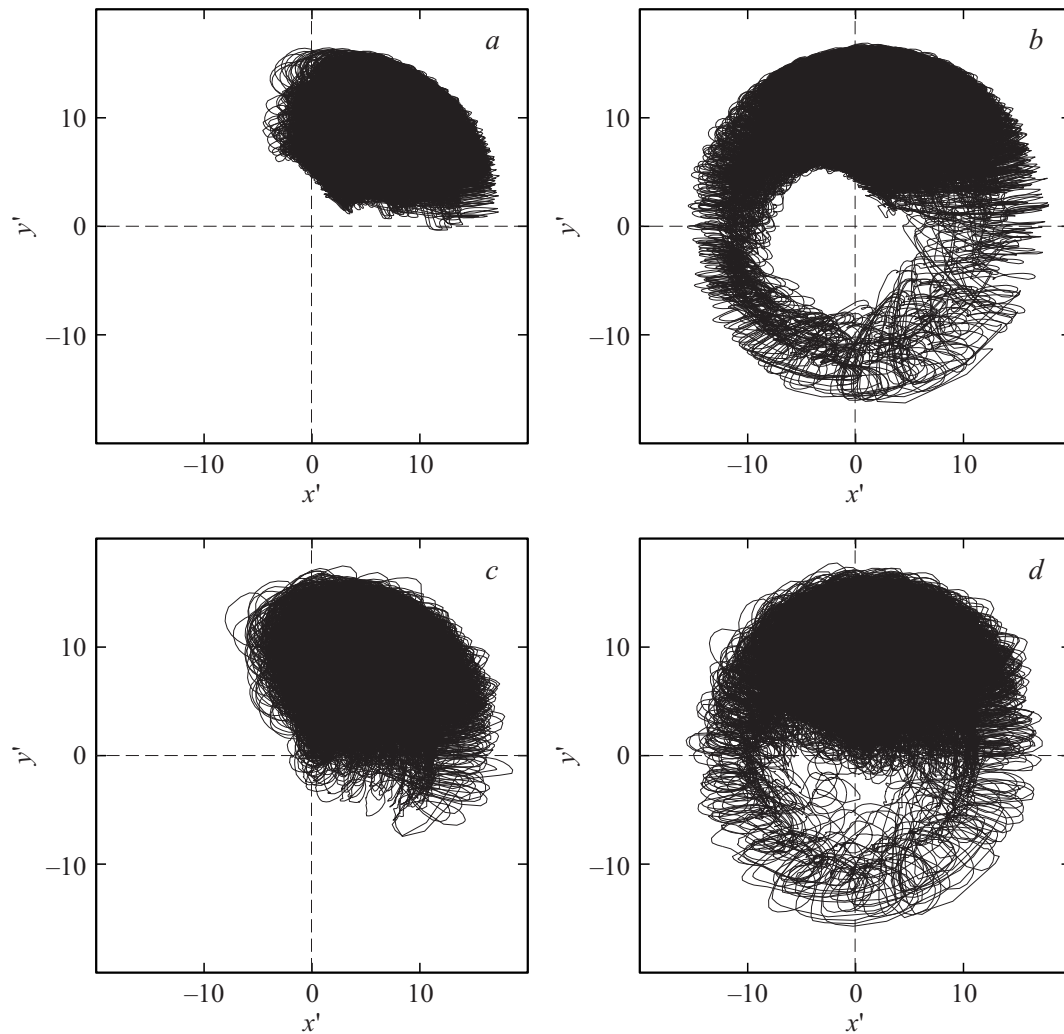


Рис. 1. Фазовые траектории ведомого осциллятора Ресслера на вращающейся плоскости (x', y') : $a — \varepsilon = 0.045, D = 1.5$ — режим фазовой синхронизации, $b — \varepsilon = 0.037, D = 1.5$ — переменяемость игольного ушка, $c — \varepsilon = 0.045, D = 10$ — переменяемость кольца, $d — \varepsilon = 0.037, D = 10$ — переменяемость переменяемостей игольного ушка и кольца.

по времени $\Delta t = 0.001$. Диагностика фазовой синхронизации осуществлялась при помощи анализа разности фаз взаимодействующих систем и выполнения условия захвата фаз

$$|\Delta\phi| = |\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const.} \quad (2)$$

Фазы $\phi_{1,2}(t)$ хаотических сигналов вводились в рассмотрение как углы поворота на плоскостях $(x_{1,2}, y_{1,2})$ [12].

Прежде всего, проанализируем влияние шума на расположение границы фазовой синхронизации в системе (1). Результаты расчетов показывают, что при превышении интенсивностью шума некоторого критического значения синхронный режим разрушается из-за потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. Понятно, что в областях, где граница синхронного режима практически не меняется ($D < 9$), шум не будет оказывать существенного влияния как на порог возникновения синхронного режима, так и на характеристики переменяемости, имеющей место

на его границе. Однако в области потери фазовой когерентности аттрактором ведомой системы ($D > 9$) шум способен внести новые черты в характеристики переменяемости.

Для определения характеристик переменяемости, реализуемой в системе, проанализируем поведение ведомой системы на вращающейся плоскости, аналогично тому, как это было сделано в [9]

$$\begin{aligned} x' &= x_2 \cos \phi_1 + y_2 \sin \phi_1, \\ y' &= -x_2 \sin \phi_1 + y_2 \cos \phi_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\phi_1 = \phi_1(t)$ — фаза ведущей системы, x_2, y_2 — координаты ведомой системы. На рис. 1 приведены фазовые траектории исследуемой системы на плоскости (x', y') для различных значений интенсивности шума D и параметра связи ε . Рис. 1, a соответствует случаю, когда в системе реализуется синхронная динамика ($D = 1.5, \varepsilon = 0.045$). В данном случае аттрактор ведомой системы является фазово-когерентным, а фазовая

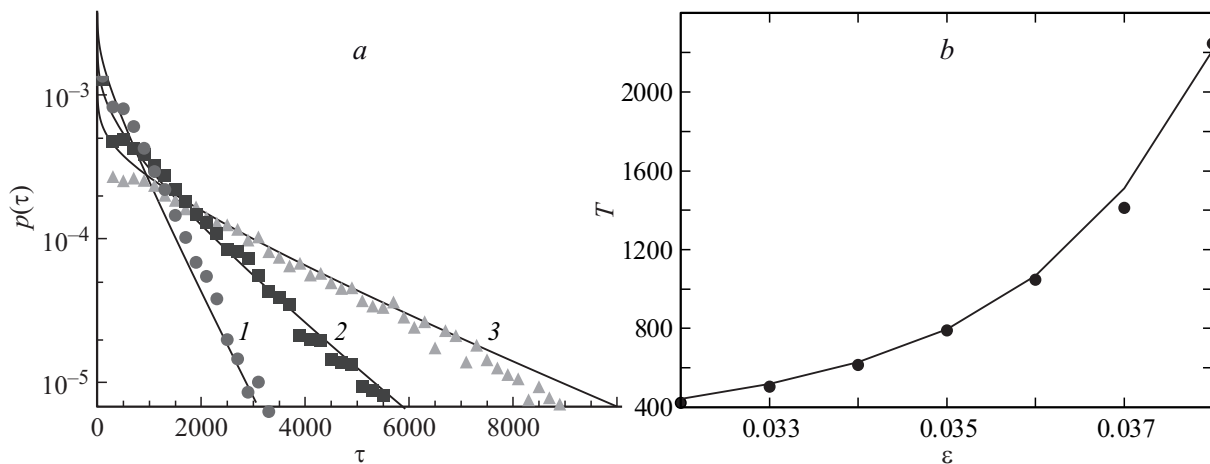


Рис. 2. *a* — нормированные распределения длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости перемежаемостей игольного ушка и кольца в двух односторонне связанных системах Ресслера в присутствии шума ($D = 10$) при различных значениях параметра связи (точки) и их теоретические аппроксимации закономерностью (4) (сплошные линии). 1 — $\varepsilon = 0.034$, $T_1 = 780$, $T_2 = 4500$; 2 — $\varepsilon = 0.036$, $T_1 = 2700$, $T_2 = 4500$; 3 — $\varepsilon = 0.034$, $T_1 = 780$, $T_2 = 4500$; *b* — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи для той же системы в режиме перемежаемости перемежаемостей игольного ушка и кольца (точки) и ее теоретическая аппроксимация закономерностью (5) (сплошная линия).

траектория ведомой системы на вращающейся плоскости представляет собой зашумленную „точку“, не охватывающую начало координат. Ниже границы возникновения синхронного режима в случае, если интенсивность шума достаточно мала ($D = 1.5$, $\varepsilon = 0.037$), также как и в случае отсутствия шума, наблюдается перемежаемость игольного ушка (рис. 1, *b*). Аттрактор ведомой системы в этом случае остается фазово-когерентным, а фазовая траектория на вращающейся плоскости представляет собой зашумленный предельный цикл. Увеличение интенсивности шума изменяет свойства когерентности аттрактора ведомой системы: он становится принципиально фазово-некогерентным, а на вращающейся плоскости фазовая траектория начинает охватывать начало координат (рис. 1, *c, d*). Охват начала координат может происходить двумя различными способами. Если параметр связи превышает пороговое значение возникновения синхронного режима в отсутствие шума ($D = 10$, $\varepsilon = 0.045$), но при заданном значении интенсивности шума фазовая синхронизация еще не возникла, фазовая траектория представляет собой зашумленную „точку“, охватывающую начало координат (рис. 1, *c*). В этом случае в системе реализуется перемежаемость кольца. Если же параметр связи лежит ниже порогового значения установления фазовой синхронизации в отсутствие шума ($D = 10$, $\varepsilon = 0.037$), на вращающейся плоскости фазовая траектория представляет собой зашумленный предельный цикл, охватывающий начало координат (рис. 1, *d*). В данном случае в системе имеет место перемежаемость перемежаемостей игольного ушка и кольца.

Для подтверждения наличия перемежаемости перемежаемостей на границе фазовой синхронизации в присутствии шума проанализируем статистические характеристики перемежаемости: распределение длительностей

ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. В работе [10] было показано, что в режиме сосуществования перемежаемостей игольного ушка и кольца распределение длительностей ламинарных фаз должно подчиняться соотношению:

$$p(\tau) = \frac{\exp(-\tau/T_1)}{(T_1 + T_2)} \left(1 - \frac{\tau}{T_1}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_2}\right) + \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1 T_2 (T_1 + T_2)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_1} - \frac{\tau}{T_2}\right) + \frac{\exp(-\tau/T_2)}{(T_1 + T_2)} \left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_1}\right), \quad (4)$$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная Γ -функция. При этом средняя длительность ламинарных фаз в этом режиме будет удовлетворять зависимости

$$T = -\frac{T_1^2 \log\left(\frac{T_1 + T_2}{T_1}\right) - 2T_1 T_2 + T_2^2 \log\left(\frac{T_1 + T_2}{T_2}\right)}{T_1 + T_2}, \quad (5)$$

где $T_{1,2}$ — численно полученные средние длительности ламинарных фаз для режимов, когда наблюдается только один тип перемежаемости (перемежаемость игольного ушка или перемежаемость кольца) [10].

На рис. 2, *a* приведены численно полученные распределения длительностей ламинарных фаз для системы (1), находящейся в режиме перемежаемости перемежаемостей, при различных значениях управляющих параметров и их теоретические аппроксимации. Из рисунка видно, что во всех рассмотренных случаях результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний, что подтверждает возможность реализации

переменяемости переменяемостей на границе фазовой синхронизации в присутствии шума.

Дополнительным подтверждением наличия переменяемости переменяемостей игольного ушка и кольца на границе фазовой синхронизации в присутствии шума является зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи. На рис. 2, *b* приведены такие зависимости для системы (1), полученные численно (точки) и аналитически в соответствии с соотношением (5) (сплошная линия). Нетрудно заметить, что численно полученные данные находятся в хорошем соответствии с результатами теоретических предсказаний. Аналогичные результаты получены для однонаправленно связанных гидродинамических моделей диодов Пирса, находящихся под действием шума.

Таким образом, в однонаправленно связанных хаотических системах шум приводит к появлению новых эффектов вблизи границы фазовой синхронизации. В частности, при достаточно большой интенсивности шума вблизи возникновения синхронного режима наблюдается переменяемость переменяемостей игольного ушка и кольца. Обнаруженный эффект обладает высокой степенью общности. Можно ожидать, что подобные закономерности будут наблюдаться и в реальных системах.

Исследование выполнено при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-807.2014.2), Российского фонда фундаментальных исследований (14-02-31088-мол-а) и Минобрнауки РФ (проекты № 931, 3.23.2014/К).

Список литературы

- [1] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
- [2] Kim C.M., Yim G., Ryu J., Park Y. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, N 24. P. 5317–5320.
- [3] Perez Velazquez J.L. et al. // European J. Neuroscience. 1999. Vol. 11. P. 2571–2576.
- [4] Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F.T. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 19. P. 194 101.
- [5] Cabrera J.L., Milnor J. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 15. P. 158 702.
- [6] Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A. // Brain Research. 2012. Vol. 1436. P. 147–156.
- [7] Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. N 2. P. 1140–1150.
- [8] Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. N 1. P. 47–50.
- [9] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 114 101.
- [10] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Zhuravlev M.O., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // CHAOS. 2013. Vol. 23. N 3. P. 033 129.
- [11] Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разевиг В.Д. // Автоматика и телемеханика. 1975. Т. 4. С. 133–137.
- [12] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 22. P. 4193–4196.