

01

## Использование непрерывного вейвлетного преобразования для анализа структурных изменений в сложных сетях

© В.А. Максименко,<sup>1,2</sup> Г.В. Осипов,<sup>1</sup> В.В. Макаров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, 410054 Саратов, Россия  
e-mail: maximenkov1@gmail.com

(Поступило в Редакцию 16 октября 2014 г.)

Проведен анализ динамики сети фазовых осцилляторов при помощи непрерывного вейвлетного преобразования. В качестве примера рассмотрена адаптивная сеть, в которой возникновение синхронной динамики приводит к усилению связи между взаимодействующими элементами. Показано, что использование вейвлетного преобразования для анализа интегральной характеристики сети позволяет эффективно детектировать изменения в топологии сети и процессы кластеризации.

В последнее время внимание научного сообщества привлекает исследование динамики объектов, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов. Подобные объекты с сетевой структурой могут являться как моделями искусственно созданных систем (сети взаимодействующих радиofизических элементов, искусственные обучающиеся нейронные сети), так и математическими интерпретациями реальных биологических [1], социальных [2], техногенных [3] и т.д. объектов.

Исследование динамики реальных сетей, как правило, осуществляется путем построения математических моделей и их численного анализа. Однако данный подход может применяться в том случае, когда известны законы, описывающие динамику отдельных элементов исследуемой сети, а также распределение и временную эволюцию связей между ними. Для анализа социальных сетей, например, активно используются математические модели, в которых динамика отдельного узла описывается гармоническим осциллятором с заданной уникальной частотой, а связи между узлами моделируются согласно данным статистического анализа и социологических исследований [4].

В то же самое время изучение широкого класса реальных систем при помощи построения и анализа математических моделей не представляется возможным. В данном случае исследователи сталкиваются с отсутствием информации о топологии сети и динамике отдельных элементов. В качестве конкретного примера таких задач выступает в первую очередь изучение процессов синхронизации и образования структурных паттернов в нейронных сетях головного мозга [5]. Информация о состоянии нейронной сети и ее эволюции во времени может быть получена при помощи электроэнцефалограмм (ЭЭГ) и магнитоэнцефалограмм (МЭГ), которые представляют собой записи суммарных сигналов электрической активности, порожденных большими нейронными ансамблями.

Задачи, связанные с анализом подобных интегральных характеристик нейронного ансамбля и интерпретацией временных изменений макроскопических характеристик сети с эволюцией ее топологии, в настоящее время имеют большое значение для фундаментальных исследований в области нелинейной динамики, а также прикладных аспектов, связанных с изучением как нормальной, так и патологической активности головного мозга.

В настоящей работе рассматривается возможность анализа структурных изменений в сложных сетях при помощи анализа их интегральных характеристик с использованием непрерывного вейвлетного преобразования.

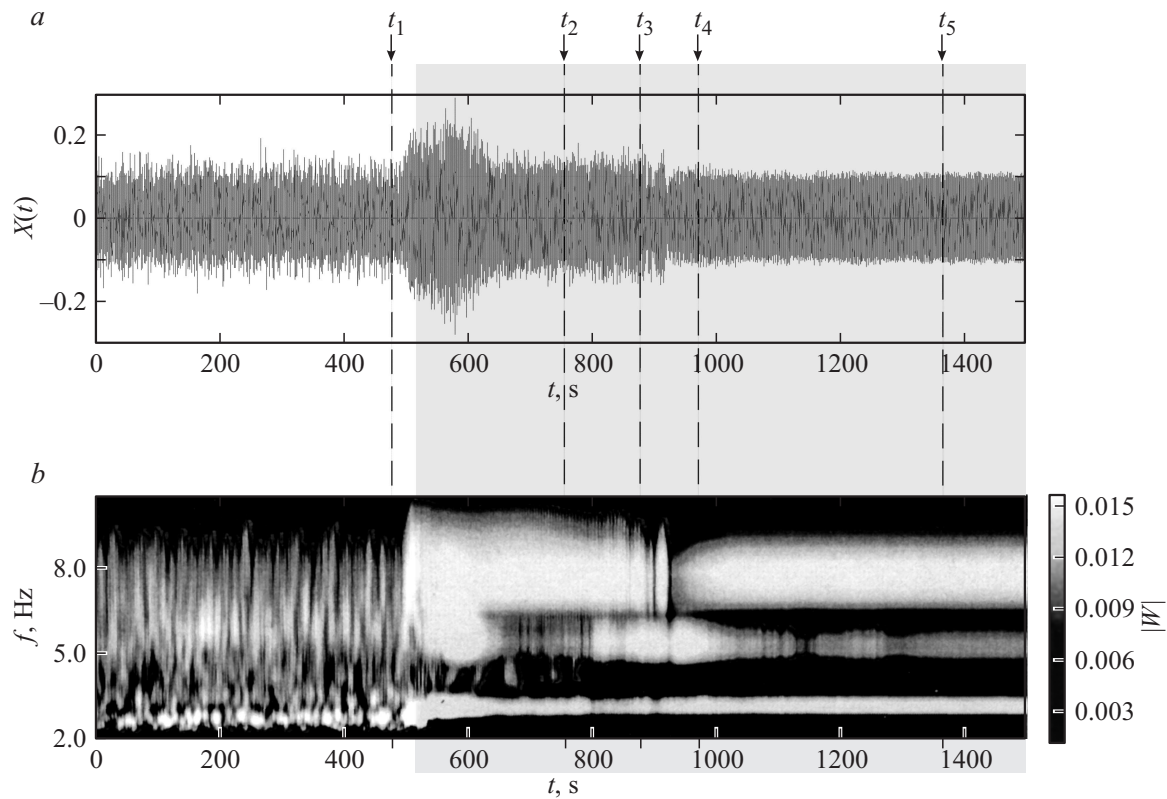
В качестве объекта для исследования в работе используется сеть фазовых осцилляторов Курамото, предложенная в 1975 г. [6] в качестве математической интерпретации коллективной динамики химических и биологических осцилляторов [7]. В последнее время различные модификации данной модели сети фазовых осцилляторов активно применяются для анализа процессов кластеризации и синхронизации, в том числе и в социальных системах [4].

Динамическое состояние  $i$ -го узла данной сети определяется соотношением

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N w_{ij}(t) \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad (1)$$

где  $\omega_i$  — заданные случайным образом натуральные частоты в диапазоне  $[2\pi \text{ Hz}, 20\pi \text{ Hz}]$ ,  $w_{ij}(t)$  — вес связи, соединяющей узлы  $j$  и  $i$ , и  $\lambda$  — сила связи. Изначально фазы взаимодействующих элементов заданы случайно и распределены равномерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , при этом веса связей  $w_{ij}(t_0)$  также заданы случайно.

Особенностью данной модели является нестационарная временная динамика коэффициентов  $w_{ij}$ , определяе-



**Рис. 1.** (а) Суммарный сигнал взаимодействующих фазовых осцилляторов Курамото. (б) Амплитуда вейвлетного преобразования суммарного сигнала. Область адаптивной динамики сети выделена заливкой.

мая адаптивным законом

$$w_{ij}(t) = w_{ij}(t)[s_i p_{ij}^T(t) - \sum_{l=1}^N w_{il}(t) p_{lj}^T(t)], \quad (2)$$

где  $s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}$  — сумма входящих связей элемента с индексом  $i$ , а величина  $p_{ij}^T(t)$  определяет степень синхронизации элементов  $i$  и  $j$ , усредненная на интервале времени  $T = 100$  s [4].

$$p_{ij}^T(t) = \frac{1}{T} \left| \int_{t-T}^t e^{i[\varphi_j(\tau) - \varphi_i(\tau)]} d\tau \right|. \quad (3)$$

Рассматриваемый адаптивный закон (2), (3) реализует обратную связь между динамикой элементов и структурой сети и является основным механизмом, обуславливающим изменение ее топологии. Из формулы (2) следует, что величина производной  $w_{ij}(t)$  определяется степенью синхронизации между соответствующими элементами и оказывается наибольшей в случае сильной синхронизации.

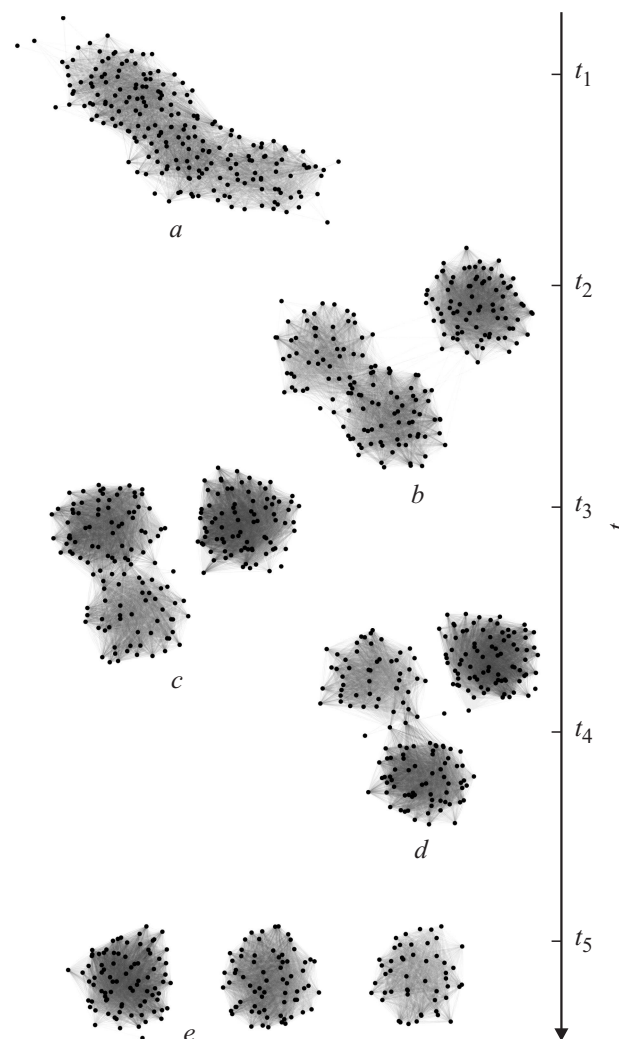
Как было упомянуто ранее, анализ реальных сетей зачастую основан, главным образом, на рассмотрении интегральных характеристик. Для рассматриваемой нами модельной сети в качестве такого параметра выступает суммарный сигнал взаимодействующих фазовых

осцилляторов

$$X(t) = \sum_{j=1}^N A \cos(\varphi_j). \quad (4)$$

В данном случае  $N = 200$  — количество элементов сети,  $A = 1$  — безразмерная амплитуда сигнала, снимаемого с каждого узла. Данная зависимость представлена на рис. 1, а. Из рисунка видно, что включение адаптивного механизма (2), (3) (момент времени  $t = 500$  s) приводит к резким качественным изменениям сигнала, что, очевидно, связано с изменениями в топологии сети. Подобный переходный процесс в данном случае длится около 400 s, после чего сеть приходит к стационарному состоянию, характеризующемуся неизменяющимися во времени характеристиками макроскопического параметра.

Учитывая связь адаптивных процессов с установлением режимов синхронной динамики между взаимодействующими осцилляторами, можно с высокой степенью вероятности предположить, что изменение спектрального состава рассматриваемого суммарного сигнала соответствует изменению топологии исследуемой сети. Для проверки данного предположения в работе проведен анализ интегральной характеристики сети при помощи непрерывного вейвлетного преобразования, являющегося наиболее подходящим методом для анализа сигналов с нестационарным спектральным составом [8].



**Рис. 2.** Визуализации структуры рассматриваемой сети фазовых осцилляторов Курамото в момент времени  $t_1 = 450$  s (*a*), предшествующий включению адаптивного механизма, и в моменты времени  $t_2 = 730$  (*b*),  $t_3 = 880$  (*c*),  $t_4 = 960$  (*d*),  $t_5 = 1360$  (*e*), соответствующие адаптивной динамике.

Рассмотрим вейвлетное преобразование сигнала (4), выступающего в роли интегральной характеристики сети. В терминах линейных частот  $f = \omega/2\pi$  преобразование имеет вид

$$W(f, t) = \sqrt{f} \int_{t-4/f}^{t+4/f} X(t') \psi^*(f(t' - t)) dt', \quad (5)$$

где  $f$  соответствует диапазону частот [1–10 Hz], по которым происходит разложение анализируемого сигнала,  $\psi^*(t - t')$  — материнский вейвлет Морле [8], символ (\*) обозначает комплексное сопряжение.

Результат преобразования представлен на рис. 1, *b*. Видно, что в начальный момент времени энергия  $|W(f, t)|$  равномерно распределена по рассматриваемому диапазону частот (момент времени  $t_1$ ), что обусловлено начальным разбросом частот осцилляторов и их фаз. Анализ результатов вейвлетного преобразования

при  $t > 500$  s (момент включения адаптации) показывает, что синхронизация между отдельными группами элементов начинает усиливаться. При этом под действием адаптивных механизмов ослабевает их связь с другими элементами (моменты времени  $t_2$  и  $t_3$ ), что приводит к разбиению сети на группы сильно связанных элементов, находящихся в режиме фазовой синхронизации, каждой из которых соответствует наличие максимума на вейвлетной поверхности.

Для иллюстрации описанного выше процесса кластеризации на рис. 2 показаны визуализации структуры сети в моменты времени  $t_1 \dots t_5$ , отмеченные стрелками на рис. 1, *b* (направление хода времени на рис. 2 указано справа от представленных визуализаций). Визуализации построены при помощи программного пакета Cytoscape [9] на основе значений коэффициентов связи  $w_{ij}$ . Рис. 2, *a* соответствует динамике сети до активации адаптивного механизма. Видно, что в данном случае сеть не является упорядоченной. Ее структура опре-

деляется заданными случайным образом связями  $w_{ij}$  между элементами. При включении адаптации структура сети начинает эволюционировать (рис. 2, *b–d*), что в конечном итоге приводит к ее разбиению на кластеры (рис. 2, *e*). Сопоставляя результаты представленной визуализации с результатами вейвлетного анализа интегральной характеристики сети (рис. 1, *b*), можно отметить, что изменение структуры сети и образование кластеров могут быть успешно детектированы при помощи вейвлетного анализа интегральной характеристики сети.

Таким образом, в работе продемонстрирована возможность детектирования возникновения кластеров в адаптивной сети при помощи вейвлетного анализа макроскопической характеристики (суммарного сигнала взаимодействующих элементов). Предложенный в работе метод анализа сети может быть использован для детектирования процессов кластеризации в сети нейтронов головного мозга, где в качестве макроскопической характеристики выступает запись ЭЭГ и МЭГ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации государственного задания в сфере научной деятельности (проект 3.23.2014К (СГТУ-157)), РНФ (проект № 14-02-00811), гранта РФФИ (№ 15-02-00624 А) а также Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-807.2014.2). Грант (соглашение N 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

## Список литературы

- [1] *Valencia M., Pastor M.A., Fernandez-Seara V.A.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. N 5. P. 050 905.
- [2] *Onnela J.P., Saramäki J., Hyvönen J. et al.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2007. Vol. 104. P. 7332.
- [3] *Stehle' J., Voirin N., Barrat A. et al.* // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. N 3. P. 035 101.
- [4] *Assenza S., Gutierrez R., Gomez-Gardenes J. et al.* // Scientific Rep. 2013. Vol. 1. N 99. P. 1.
- [5] *Ulhaas P.J.* // Frontiers In Neurosc. 2009. Vol. 3. P. 17.
- [6] *Kuramoto Y.* // Lect. Notes in Phys. 1975. Vol. 30. N 420.
- [7] *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. NY: Springer-Verlag, 1984.
- [8] *Короновский А.А., Макаров В.А., Павлов А.Н., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии. М.: Физматлит, 2013.
- [9] *Smoot M., Ono K., Ruschinski J. et al.* // Bioinformatics. 2011. Vol. 27. N 3. P. 431.