

УДК 517.9

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ВБЛИЗИ ГРАНИЦ УСТАНОВЛЕНИЯ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ

© 2013 г. С. А. Шурыгина<sup>1</sup>, А. А. Короновский<sup>1,2</sup>, О. И. Москаленко<sup>1,2</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>

E-mail: shuryginasa@gmail.com

Исследованы локальные показатели Ляпунова, связанные с закономерностями перехода нулевого и положительного условных показателей Ляпунова в область отрицательных значений. В рассмотрение введены локальные условные показатели Ляпунова отдельно для ламинарных и турбулентных фаз. Показано, что отрицательность этих условных показателей — это проявление синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах вблизи границ установления синхронных режимов, где полностью синхронный режим еще не установился.

DOI: 10.7868/S0367676513120235

Показатели Ляпунова представляют собой мощный инструмент для анализа сложного поведения систем [1–5]. Они широко используются для описания как автономной, так и неавтономной динамики систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Одно из наиболее важных приложений показателей Ляпунова — это их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при варьировании управляющих параметров. Например, показатели Ляпунова используются для обнаружения перехода от хаотического режима к гиперхаосу [6], для выявления наличия гиперболического аттрактора [3, 7], для диагностики различных типов хаотической синхронизации [8–13].

Наряду с показателями Ляпунова в рассмотренные иногда вводят локальные показатели [14, 15], которые рассчитываются на конечном интервале времени. Такой подход можно использовать, например, при анализе экспериментальных данных, когда в распоряжении исследователей находятся ограниченные временные реализации. Локальные показатели Ляпунова могут также характеризовать особенности фазового пространства рассматриваемых систем или характерные черты поведения систем, которые проявляются в различные моменты времени. В частности, в [16] локальные показатели Ляпунова использованы для объяснения поведения нулевого показателя Ляпунова вблизи границы фазовой хаотической синхронизации.

Известно, что в двух связанных хаотических системах при изменении параметра связи, как правило, происходит последовательный переход в область отрицательных значений двух показателей Ляпунова: сначала нулевого, а затем положительного [12, 17]. Изменение знака показателя Ляпунова, как отмечено выше, свидетельствует о качественных изменениях, произошедших в динамике системы. В ряде случаев переход одного из показателей Ляпунова в область отрицательных значений связывают с возникновением синхронного поведения, как, например, в случае синхронизации периодических колебаний или при установлении режимов фазовой и обобщенной синхронизации [12, 17]. В то же самое время для связанных хаотических осцилляторов при установлении режима фазовой синхронизации условный нулевой показатель Ляпунова является уже существенно отрицательным [12, 18]. Переход старшего условного показателя Ляпунова через нуль происходит тоже немного раньше установления режима обобщенной хаотической синхронизации (правда, разница между критическими значениями параметра связи оказывается столь незначительной, что зачастую не принимается в рассмотрение).

Локальные показатели Ляпунова позволяют объяснить процессы, приводящие к отрицательности нулевого показателя Ляпунова вблизи границы фазовой хаотической синхронизации [16]. Известно, что ниже границы установления режима фазовой хаотической синхронизации наблюдается перемежающееся поведение [19, 20]. В этом случае зависимость разности фаз исследуемой системы и внешнего воздействия от времени  $\Delta\varphi(t)$  содержит участки синхронного поведения (ламинарные фазы), прерываемые внезапными турбулентными всплесками, во время которых абсолютная вели-

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина.

чина разности фаз  $|\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Отрицательность показателя Ляпунова  $\Lambda_0$  связана именно с наличием участков синхронного поведения. Для проверки этого предположения вводятся в рассмотрение локальные показатели Ляпунова, отдельно для ламинарных и турбулентных фаз.

Как правило, локальные показатели Ляпунова определяют на интервале времени фиксированной длины  $\tau = \text{const}$ . В этом случае одна из важнейших характеристик поведения системы – это распределение локальных показателей Ляпунова  $N(\lambda_l)$ , которое связано с показателем Ляпунова  $\lambda$  как

$$\lambda = \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_l N(\lambda_l) d\lambda_l, \quad (1)$$

$$\text{где } N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} N(\lambda_l) d\lambda_l.$$

Поскольку в проводимом рассмотрении локальные показатели Ляпунова используются для того, чтобы характеризовать динамику системы отдельно для ламинарных и для турбулентных фаз, каждый локальный показатель Ляпунова определяется на отдельном временном интервале  $\tau$ , соответствующем своей фазе, ламинарной или турбулентной. Так как длительности  $\tau$  каждой фазы различны, в этом случае необходимо рассматривать распределение  $N(\lambda_l, \tau)$  вместо распределения  $N(\lambda_l)$ . Соответственно соотношение (1) должно быть заменено на

$$\lambda = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \lambda_l \tau N(\lambda_l, \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau N(\lambda_l, \tau) d\tau}. \quad (2)$$

Поскольку исследование локальных показателей Ляпунова проводится отдельно для ламинарных и турбулентных фаз, необходимо рассматривать два распределения:  $N_s(\lambda_l, \tau)$  и  $N_a(\lambda_l, \tau)$ , соответствующих синхронным и асинхронным участкам поведения системы. Очевидно, что в этом случае величина рассматриваемого показателя Ляпунова  $\Lambda_0$  связана с этими распределениями следующим образом:

$$\Lambda_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau (N_s(\lambda_l, \tau) + N_a(\lambda_l, \tau)) d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_l \int_0^{\infty} \tau (N_s(\lambda_l, \tau) + N_a(\lambda_l, \tau)) d\tau}. \quad (3)$$

Как установлено ранее [16], отрицательность нулевого показателя Ляпунова  $\Lambda_0$  в системе двух связанных хаотических осцилляторов вблизи границы установления режима фазовой хаотической синхронизации связана, в первую очередь, с дина-

микой систем во время ламинарных фаз. Именно эти участки поведения и обуславливают отрицательность величины  $\Lambda_0$ . В то же самое время перемежающееся поведение наблюдается и вблизи границ установления других синхронных режимов взаимодействующих хаотических систем (например, вблизи границы режима обобщенной синхронизации), а также систем с регулярной динамикой, находящихся под воздействием шума. Соответственно можно ожидать, что механизмы, приводящие к переходу соответствующего показателя Ляпунова в область отрицательных значений, обнаруженные при изучении поведения связанных хаотических осцилляторов вблизи границы фазовой синхронизации, имеют универсальный характер и будут свойственны широкому классу систем с хаотической и стохастической динамикой (тем более что существует тесная взаимосвязь между режимами детерминированного хаоса и режимами, наблюдающимися в системах с регулярной динамикой, находящихся под воздействием шума, см., например, [11]). Соответственно для подтверждения (или опровержения) данного предположения необходимо провести рассмотрение поведения локальных показателей Ляпунова вблизи границ установления других синхронных режимов. В качестве таковых в настоящей работе выбран синхронный режим для неавтономного генератора Ван-дер-Поля с шумом (система с периодической динамикой, находящаяся под действием шума) и режим обобщенной хаотической синхронизации в дискретных отображениях.

Начнем рассмотрение с систем с периодической динамикой, находящихся под действием шума. Как отмечено выше, в качестве объекта исследования выберем классический автогенератор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\Omega t) + \xi(t), \quad (4)$$

где  $\lambda = 0.1$  – управляющий параметр системы,  $\Omega = 0.98$  и  $A$  – частота и амплитуда внешнего гармонического воздействия, соответственно,  $\xi(t)$  –  $\delta$ -коррелированный белый шум ( $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = D\delta(t - \tau)$ ),  $D$  – его интенсивность. Для интегрирования системы (4) использован одношаговый метод Эйлера с шагом по времени  $h = 5 \times 10^{-4}$ .

В отсутствие шума ( $D = 0$ ) осциллятор Ван-дер-Поля демонстрирует синхронную динамику при  $A > A_c = 0.0238$ . Порог возникновения синхронного режима в данном случае совпадает с моментом перехода нулевого показателя Ляпунова  $\Lambda_0$  в область отрицательных значений. Добавление шума приводит к сдвигу порогового значения установления синхронного режима в сторону больших значений амплитуд внешнего воздействия, при этом момент перехода нулевого ляпуновского показателя через ноль, наоборот, сдвиг-

гается в сторону меньших значений параметра  $A$  [12, 21].

Проведем исследование распределения локальных показателей Ляпунова при установлении синхронного режима для осциллятора Ван-дер-Поля (4). Для расчета показателей Ляпунова использовали алгоритм Бенеттина с процедурой ортогонализации Грамма–Шмидта [22].

На рис. 1 приведены распределения локальных показателей Ляпунова для ламинарных и турбулентных фаз при  $D = 1.0$ , а также соответствующие им линии уровня. Линии уровня для распределения  $N_a(\lambda_l, \tau)$  локальных показателей, отвечающих турбулентным фазам, показаны сплошными линиями, а аналогичные линии уровня для распределений  $N_s(\lambda_l, \tau)$  локальных ляпуновских экспонент ламинарных фаз – пунктиром. Распределения построены по  $n = 5000$  фазам. Значение параметра надкритичности было выбрано  $A = 0.0245$ , что соответствует режиму перемежаемости в системе (4). Из рисунка видно, что распределение для турбулентных фаз оказывается симметричным относительно нуля, в то время как распределение  $N_s(\lambda_l, \tau)$ , полученное для ламинарных фаз, является асимметричным и сдвигается в область отрицательных значений. Таким образом, отрицательность рассматриваемого показателя Ляпунова  $\Lambda_0$  в системе (4) под внешним воздействием с шумом связана, в первую очередь, с динамикой системы во время ламинарных фаз. Именно эти участки обуславливают отрицательность величины  $\Lambda_0$ .

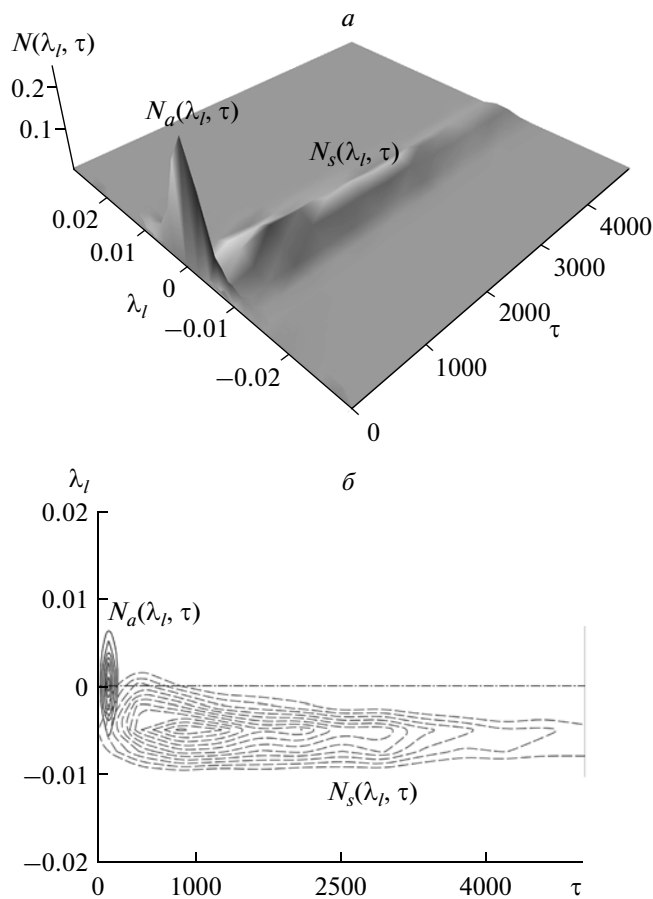
Рассмотрим теперь вопрос о поведении старшего (условного) показателя Ляпунова при изменении параметра связи между системами. Как упоминалось выше, переход старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений свидетельствует о наступлении режима обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных системах [2, 23]. Рассмотрим этот вопрос более детально на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений:

$$x_1^{n+1} = f(x_1^n, \mu_1), \tag{5}$$

$$x_2^{n+1} = f(x_2^n, \mu_2) + \varepsilon(f(x_1^n, \mu_1) - f(x_2^n, \mu_2)),$$

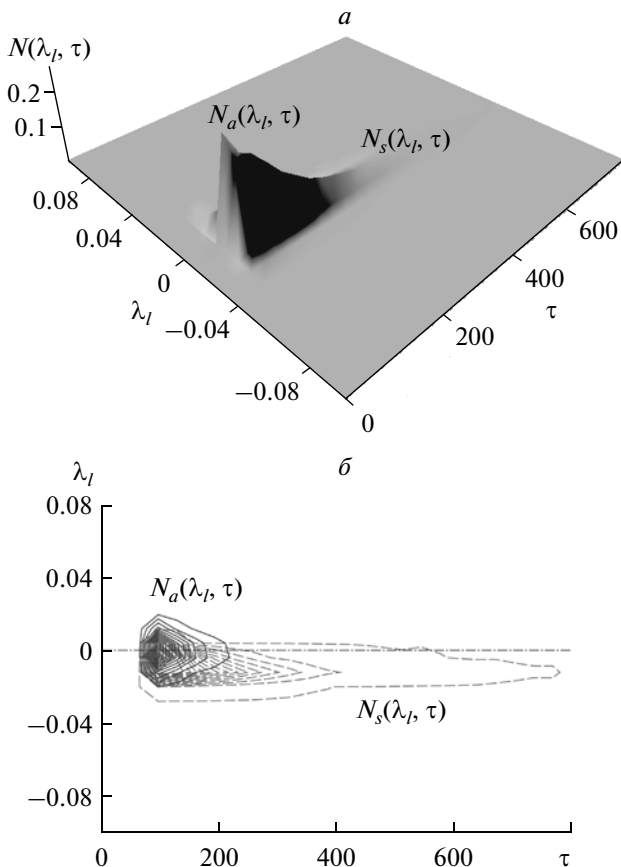
где  $f(x, \mu) = \mu x(1 - x)$ ,  $\mu_1 = 3.75$ ,  $\mu_2 = 3.79$ . При указанных значениях управляющих параметров условный показатель Ляпунова  $\lambda_r$  оказывается отрицательным при  $\varepsilon \in [0.121; 0.174]$  и  $\varepsilon \geq 0.294$ , что свидетельствует о наличии обобщенной синхронизации в указанных диапазонах. В области  $\varepsilon \in [0.121; 0.174]$  в системе имеет место слабая синхронизация, в то время как при  $\varepsilon \geq 0.294$  наблюдаемый режим соответствует сильной синхронизации [24].

Проанализируем поведение локальных положительных показателей Ляпунова на границе



**Рис. 1.** *a* – нормированные распределения локальных ляпуновских экспонент, полученных для синхронных и асинхронных фаз хаотических колебаний осциллятора Ван-дер-Поля (4) под внешним воздействием в присутствии шума. Распределения построены по  $n = 5000$  фазам. Значение параметра надкритичности  $A = 0.0245$ , ляпуновская экспонента  $\Lambda_0 = -0.0042$ . *б* – проекция распределений  $N_s(\lambda_l, \tau)$  и  $N_a(\lambda_l, \tau)$  на плоскость  $(\tau, \lambda_l)$ , линии уровня показаны для турбулентных фаз с шагом  $h_{N_s} = 2$  (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует величине  $N_a = 2$ ), для ламинарных – с шагом  $h_{N_a} = 2$  (внешняя (минимальная) линия уровня соответствует величине  $N_a = 2$ ).

обобщенной синхронизации в исследуемой системе. Следует отметить, что, хотя метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод вспомогательной системы диагностируют наступление синхронного режима при близких значениях параметра связи, переход условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений происходит все же немного раньше наступления обобщенной синхронизации. В той области, где условный показатель Ляпунова отрицателен, но режим обобщенной синхронизации еще не наступил (эта область очень узкая и зачастую не принимается в рассмотрение), имеет место перемежающаяся обобщенная син-



**Рис. 2.** *a* — распределения локальных ляпуновских экспонент, полученных для ламинарных и турбулентных фаз системы однонаправленно связанных логистических отображений (5), построенные по  $n = 15000$  фазам. Значение параметра связи  $\varepsilon = 0.121$ , условная ляпуновская экспонента  $\Lambda_r = -0.014$ . *b* — проекция распределений  $N_s(\lambda_l, \tau)$  и  $N_a(\lambda_l, \tau)$  на плоскость  $(\tau, \lambda_l)$ .

хронизация, характеристики которой соответствуют перемежаемости типа *on-off* [25]. Можно предположить, что по аналогии с поведением нулевого показателя Ляпунова вблизи границы фазовой синхронизации отрицательность старшего условного показателя Ляпунова  $\lambda_r$  может быть связана с наличием ламинарных фаз (участков синхронного поведения) во временных реализациях взаимодействующих однонаправленно связанных дискретных отображений (5). Для проверки этого предположения снова рассмотрим локальные показатели Ляпунова отдельно для ламинарных и турбулентных фаз. Значение параметра связи между взаимодействующими системами выберем  $\varepsilon = 0.122$ .

На рис. 2 показаны распределения локальных показателей Ляпунова  $\lambda_l$  для ламинарных и турбулентных фаз системы однонаправленно связанных логистических отображений (5), а также соответствующие им линии уровня. По аналогии

с автогенератором Ван-дер-Поля (4) линии уровня для распределения  $N_a(\lambda_l, \tau)$  локальных показателей Ляпунова, отвечающих турбулентным фазам, показаны сплошными линиями, а аналогичные линии уровня для распределений  $N_s(\lambda_l, \tau)$  локальных показателей Ляпунова для ламинарных фаз — пунктиром. Все распределения построены по  $n = 15000$  фаз. Из рисунка видно, что, как и в случае локальных нулевых показателей Ляпунова, локальные ляпуновские экспоненты, соответствующие интервалам синхронного движения, локализованы в области отрицательных значений, в то время как локальные показатели Ляпунова, найденные для асинхронных участков, расположены в окрестности нуля.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что механизмы, ответственные за отрицательность старшего (положительного) показателя Ляпунова, являются теми же, что и в рассмотренном выше случае нулевого условного показателя Ляпунова. Отрицательность старшего условного показателя Ляпунова — следствие проявления синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах, соответствующих ламинарным фазам поведения систем. Кроме того, существуют также и турбулентные участки, на которых старший условный показатель Ляпуновского положителен и близок к нулю, что говорит о том, что режим обобщенной синхронизации в этом случае еще не наступил.

Исследование выполнено при поддержке Минобрнауки РФ (14.В37.21.0751, 14.В37.21.0059), РФФИ (грант № 12-02-00221) и Государственного задания Минобрнауки России высшим учебным заведениям на 2013 и плановый период 2014 и 2015 гг. в части проведения НИР.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Macek W.M., Redaelli S. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 6496.
2. Porcher R., Thomas G. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 1. P. 010902(R).
3. Thamilmaran K., Senthilkumar D.V., Venkatesan A., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. 036205.
4. Karakasidis T.E., Fragkou A., Liakopoulos A. // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. № 2. 021120.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Maksimenko V.A., Moskalenko O.I. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. № 8. 082302.
6. Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I. // Radiophys. Quant. Electron. 2004. V. 47. № 5, 6. P. 341.
7. Kuznetsov S.P. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. 144101.
8. Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. R4508.
9. Goldobin D.S., Pikovsky A.S. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 4. P. 045201(R).
10. Goldobin D.S., Pikovsky A.S. // Physica A. 2005. V. 351. P. 126.

11. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. № 5–6. P. 423.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. 036212.
13. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. 036216.
14. *Prasad A., Ramaswamy R.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. № 3. 2761.
15. *Zillmer R., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. № 6. 061117.
16. *Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е., Шурыгина С.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 10. С. 1.
17. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
18. *Politi A., Ginelli F., Yanchuk S., Maistrenko Y.* // Physica D. 2006. V. 224. P. 90.
19. *Kye W.H., Kim C.M.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 6304.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. № 2. 026206.
21. *Короновский А.А., Храмов А.Е., Шурыгина С.А.* // Изв. РАН. Сер/ физ. 2009. Т. 73. № 12. С. 1728; *Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A.* // Bull. Russ. Acad. Sci.: Physics. 2009. V. 73. № 12. P. 1620.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Серия “Современная теория колебаний и волн”. М.: Физматлит, 2001.
23. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
24. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2013. № 46. P. 12.
25. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 2. P. 169.