

УДК 517.9

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЕТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ СВЯЗЕЙ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ РЕГИСТРИРУЕМЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

© 2014 г. А. А. Харченко<sup>1</sup>, В. В. Макаров<sup>1,2</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>

*E-mail: ainadil@mail.ru, hramovae@gmail.com*

Проведено численное исследование сети связанных осцилляторов (генераторов Ван-дер-Поля). Рассмотрен вопрос диагностики фазовой синхронизации в сети путем изучения индекса синхронизации как по всем элементам сети, так и по интегральным характеристикам при различных частотных расстройках генераторов и при различных топологиях связи между элементами сети.

DOI: 10.7868/S0367676514120126

### ВВЕДЕНИЕ

Одно из важнейших направлений исследований в современной радиофизике и нелинейной динамике — изучение динамических процессов в сетях нелинейных элементов со сложной топологией связей [1, 2].

Особенно важны данные исследования для нейродинамики и нейрофизиологии, где исследуемые объекты — нейронные ансамбли центральной и периферийной нервных систем — представляют собой сложные сети элементов с собственной сложной динамикой — нейронов [3]. Традиционным и весьма эффективным методом исследования электрической активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ), которые представляют собой усредненную сумму электрических полей, генерируемых синаптическими токами большой группы нейронов в окрестности регистрирующего микроэлектрода.

Считается, что каждый нейрон генерирует импульсы одной и той же формы и амплитуды, причем форма импульсов разных нейронов уникальна, а амплитуда зависит от расстояния между клеткой и микроэлектродом [4]. У человека запись ЭЭГ проводят обычно посредством электродов, размещаемых на коже головы. У животных традиционно используют метод вживленных электродов, который дает возможность получить более

детальную информацию об электрической активности относительно небольших популяций нейронов коры головного мозга и подкорковых структур. Таким образом, можно сделать вывод, что сигналы электроэнцефалограмм представляют собой усредненные (интегральные) характеристики, описывающие динамику сложной нейронной сети. Увеличение амплитуды ЭЭГ говорит о повышении когерентности колебаний в ансамбле нейронов в окрестности регистрирующего электрода. В последнее время все чаще делаются попытки использовать сигналы ЭЭГ для диагностики различных типов синхронизации в нейронном ансамбле, в связи с этим возникает важный вопрос о необходимости оценки эффективности использования для этих целей интегральных характеристик, представляющих интегральные усредненные по ансамблю характеристики.

Цель данной работы — исследование сети связанных осцилляторов и сравнение качества диагностики синхронизации в нем как по сигналам каждого генератора, так и по интегральным характеристикам ансамбля.

### ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД ДИАГНОСТИКИ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЕТИ

В качестве объекта исследования выступает сеть осцилляторов, представляющих собой диссипативно связанные генераторы Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x}_i - \mu(1 - x_i^2)\dot{x}_i + \delta_i^2 x_i = \varepsilon \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_i - x_j), \quad (1)$$

где  $i, j$  — номер элемента в сети,  $N$  — количество элементов в сети,  $\mu$  — коэффициент, характеризующий

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина”.

ющий нелинейность и силу затухания колебаний,  $\varepsilon$  – параметр связи между генераторами,  $\delta_i$  – циклическая частота отдельного генератора.

Коэффициенты  $c_{ij}$  матрицы связи определяют топологию в сети. Если генератор с номером  $i$  влияет на генератор с номером  $j$ , то величина  $c_{ij} = 1$ . Если же генераторы не взаимодействуют (связь отсутствует), то  $c_{ij} = 0$ . Будем рассматривать симметричную матрицу связи, которая характеризуется условием  $c_{ij} = c_{ji}$  (с физической точки зрения, это означает, что в системе реализуются только двунаправленные связи), а также введем условия диссипативности связи, что налагает следующее условие на элементы матрицы связи на главной диагонали:

$$c_{ii} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij}. \quad (2)$$

Следует отметить, что значения коэффициентов  $c_{ij}$  определяют только факт наличия связи, в то время как, насколько сильно взаимодействие, определяет параметр  $\varepsilon$ , называемый коэффициентом или интенсивностью связи [5].

Данная система интересна тем, что генератор Ван-дер-Поля – это основная модель нелинейной теории, которая часто используется как базовая для исследования явления фазовой синхронизации. В основе концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы  $\varphi(t)$  сигнала. Аттрактор системы должен быть таким, что проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний  $(x, \dot{x})$  все время вращается вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его (фазово-когерентный аттрактор) [6]. В этом случае мгновенная фаза  $\varphi(t)$  сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости  $(x, \dot{x})$

$$\varphi(t) = \arctg\left(\frac{\dot{x}}{x}\right). \quad (3)$$

Режим фазовой синхронизации означает, что фазы сигналов взаимодействующих осцилляторов оказываются захваченными: их разность не нарастает по модулю с течением времени (т.е. не превышает наперед заданную константу, обычно рассматривают величину  $2\pi$ ) [6]

$$|\Delta\varphi_{ij}(t)| = |\varphi_i(t) - \varphi_j(t)| < 2\pi. \quad (4)$$

Для того чтобы охарактеризовать степень синхронного состояния сети количественно, будем рассматривать индекс синхронизации [5, 7], который представляет собой величину, пропорцио-

нальную числу синхронизированных между собой генераторов:

$$\sigma = \frac{2}{TN^2} \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N e^{\sqrt{-1}\Delta\varphi_{ij}(t)} \right|, \quad (5)$$

где  $\Delta\varphi_{ij}$  – разность фаз между  $i$ -м и  $j$ -м генераторами сети,  $T$  – длительность временной реализации, в течение которой проводилось моделирование процессов в сети. Значения индекса синхронизации, близкие к нулю, означают, что в сети очень малое число генераторов находится в режиме синхронизации, в то время как рост величины  $\sigma$  свидетельствует о том, что в сети все большее число осцилляторов становится синхронизованным друг с другом (режим кластерной синхронизации) и, наконец, при  $\sigma = 1$  мы имеем режим полной фазовой синхронизации в исследуемой сети.

Для анализа синхронизации с использованием интегральных характеристик вводили следующие функции, представляющие собой усредненные характеристики колебаний по некоторому подмножеству  $M$  элементов сети:

$$X_k(t) = \frac{1}{M} \sum_{n=k}^{k+M} x_n(t), \quad (6)$$

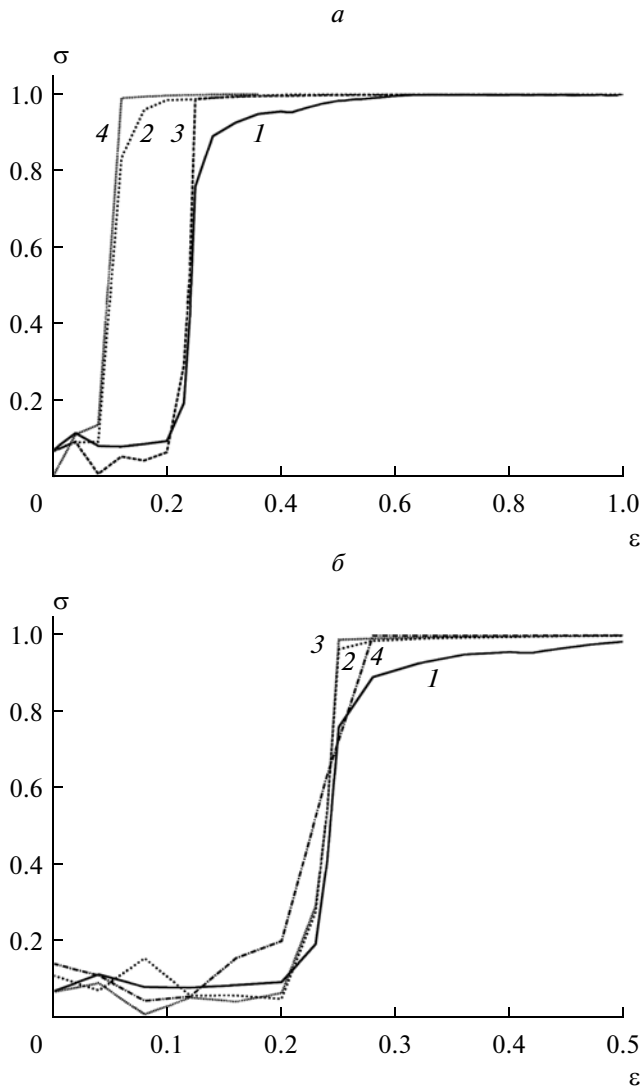
где  $M$  – число элементов, по которым проводится усреднение,  $k$  – номер первого элемента, по которому проводится усреднение.

Характеристику (6) в первом приближении можно рассматривать как аналог интегрального сигнала электроэнцефалограммы, определяющий вклад некоторой группы осцилляторов (нейронов локальной области в нейронной сети, близких к регистрирующему электроду) в регистрируемый в эксперименте сигнал от сети осцилляторов (1).

Для анализа синхронизации по интегральным характеристикам (6) использован также подход, основанный на расчете индекса синхронизации (5), но с использованием в качестве сигналов, по которым восстанавливалась фаза, интегральных усредненных характеристик  $X_k(t)$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Рассмотрим результаты численного моделирования сети связанных генераторов Ван-дер-Поля (1). Рассмотрим сеть из 100 генераторов. Значения коэффициента  $\mu_i$ , характеризующие нелинейность, возьмем постоянными для всех осцилляторов  $\mu = 1.0$ , параметр связи между гене-



**Рис. 1.** *a* – зависимость индекса синхронизации от коэффициента связи между генераторами, кривые 1 и 2 соответствуют  $\beta = 0.05$ , кривые 3 и 4 –  $\beta = 0.07$ . Зависимости 3 и 4 построены с использованием интегральных характеристик при  $M = 10$ ; *b* – зависимость индекса синхронизации от коэффициента связи между генераторами с использованием интегральных характеристик для различных параметров  $M$ : 1)  $M = 1$ , 2)  $M = 4$ , 3)  $M = 10$ , 4)  $M = 20$ ;  $\beta = 0.05$ .

раторами будем варьировать в пределах  $0 \leq \epsilon \leq 1$  с постоянным шагом  $\Delta = 0.01$ . Зададим расстройку по частоте генераторов сети в виде равномерного распределения в диапазоне частот  $\delta_i \in [0.2, 0.4]$ .

При исследовании системы генераторов рассматривали два различных подхода к построению конфигурации сети генераторов (две различные топологии связей). Первый тип исследуемой сети соответствовал случайной сети, когда связи меж-

ду элементами сети устанавливались случайным образом и варьировалось среднее число связей, приходящихся на один осциллятор (“концентрация” связей  $\beta = \bar{n}/N$  где  $\bar{n}$  – среднее число связей, приходящихся на один элемент сети,  $N$  – полное число элементов сети). Второй тип сети, который анализировали в работе, соответствовал модели “малый мир” [1, 2]. Данная сеть строится так, что каждый узел в сети соединен с пятью соседними “ближними” осцилляторами, и одна из “ближних” связей случайным образом заменена “далекой”. В последнем случае возникает феномен так называемых “малых миров”. Данное построение сети демонстрирует высокий уровень кластеризации [1].

Рассмотрим вначале сеть со случайной топологией связей. На рис. 1 представлена зависимость индекса синхронизации (кривые 1 и 2) от параметра интенсивности связи  $\epsilon$  при различных параметрах  $\beta$  сети. Индекс синхронизации строился по всем элементам сети. Можно выделить несколько характерных областей поведения данной системы. При малых коэффициентах связи наблюдается область с малым значением индекса синхронизации, соответствующим значениями  $\sigma \sim 0.1$ . Данная область соответствует несинхронному поведению сети, однако в зависимости от среднего количества связей размер данной области значительно изменяется. Для случая  $\beta = 0.05$  первая область соответствует значениям параметра связи  $\epsilon \in [0 : 0.2]$  когда, как для случая  $\beta = 0.07$ , область существенно уменьшается ( $\epsilon \in [0 : 0.08]$ ).

Далее на зависимости индекса синхронизации наблюдается значительный рост величины  $\sigma$ , в которой индекс синхронизации увеличивается до 1. В этой области происходит установление синхронного режима через режим кластерной синхронизации, когда в сети возникает несколько синхронных кластеров, в которые вовлекаются некоторые подмножества элементов сети. Наконец, третья область, где индекс синхронизации принимает значение 1, соответствует режиму полной фазовой синхронизации сети, когда все элементы сети синхронизированы друг с другом. Хорошо видно, что в случае  $\beta = 0.05$  полная фазовая синхронизация наступает при  $\sigma \sim 0.6$ , при  $\beta = 0.07$  – при  $\sigma \sim 0.35$  соответственно.

Рассмотрим теперь диагностику переходов к фазовой синхронизации в сети с использованием интегральных характеристик (6). Соответствующие кривые для случаев  $\beta = 0.05$  и  $\beta = 0.07$  и  $M = 10$  приведены на рис. 1 (кривые 3 и 4 соответственно). Хорошо видно, что использование

интегральных характеристик приводит к диагностике границы перехода к полной фазовой синхронизации существенно раньше по параметру связи, чем в случае анализа динамики каждого элемента сети. Хорошо видно, что в случае  $\beta = 0.05$  полная фазовая синхронизация при данном типе диагностики определяется при  $\varepsilon \sim 0.22$ , в случае  $\beta = 0.07$  — при  $\varepsilon \sim 0.17$ . Это связано с тем, что в режиме, когда большое количество элементов уже находится в синхронном режиме, использование усредненных характеристик (6) не позволяет выделить несинхронные элементы, которые оказываются неразличимыми при усреднении, а следовательно, и позволяют понизить индекс синхронизации (5).

Фактически использование интегральных характеристик не позволяет проанализировать переход к полной фазовой синхронизации через режим кластерной синхронизации сети. Это позволяет сделать вывод о том, что при диагностике синхронизации в нейронных ансамблях путем регистрации наблюдаемых сигналов электроэнцефалограмм или магнитоэнцефалограмм [4, 8] мы всегда будем занижать границу установления фазовой синхронизации в нейронном ансамбле.

Зависимость индексов синхронизации для различных параметров  $M$  интегральной характеристики (6) приведена на рис. 1б. Хорошо видно, что увеличение  $M$ , т.е. увеличение числа элементов, по которым проводится усреднение, приводит к “укручению” функции индекса синхронизации и, следовательно, к увеличению неточности определения границы фазовой синхронизации в сети.

Рассмотрим теперь более сложную сеть с топологией связи типа “малый мир”. Известно, что ряд нейронных подсетей в головном мозге организованы в структуры, близкие к структуре сети типа “малый мир” [9]. На рис. 2 показаны индексы синхронизации, построенные как по всем элементам сети, так и по интегральным характеристикам, от параметра связи для случая сети “малый мир”. Хорошо видно, что в данном случае мы наблюдаем меньшее различие между анализом границы установления полной фазовой синхронизации в сети (1) по интегральным характеристикам (6) и по отдельным элементам сети.

Таким образом, применение метода, основанного на наблюдении интегральных характеристик, дает лучшие результаты в случае более структурированной сети. Это связано с тем, что в подобной сети мы не наблюдаем режима развитой кластерной синхронизации.

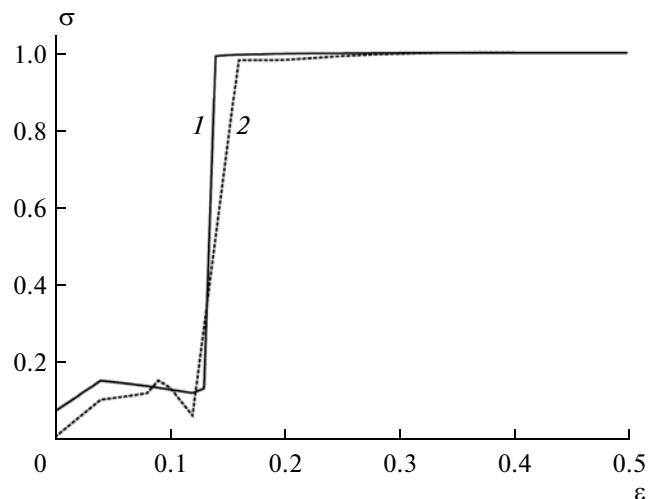


Рис. 2. Зависимость индекса синхронизации от коэффициента связи между генераторами для сети с топологией связей типа “малый мир”. Кривая 1 соответствует индексу синхронизации по отдельным элементам сети, кривая 2 построена с использованием интегральных характеристик при  $M = 10$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование сетей связанных осцилляторов с различными топологиями межэлементных связей (сеть типа “малый мир”, случайная сеть). Сделан количественный анализ фазовой синхронизации путем расчета индекса фазовой синхронизации как по всем элементам сети (1), так и по интегральным характеристикам (6) при различных частотных расстройках генераторов и различных топологиях связи между элементами сети. Показано, что диагностика синхронизации по интегральным характеристикам дает корректное описание процессов при большой интенсивности связи, когда вся сеть находится в режиме полной синхронизации, в то время как при малых коэффициентах связи использование интегральных характеристик может приводить к ошибкам в определении границ возникновения синхронной динамики, в частности, возникновения синхронных кластеров.

Выражаем благодарность А.А. Короновскому и В.В. Грубову за плодотворные обсуждения данной работы.

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (задание № 3.23.2014/К (СГТУ-157) и проект 931 (СГТУ-146)), Президентской программы поддержки молодых докторов наук (проект МД-345.2013.2), а также грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-02-00221, 14-02-31235).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strogatz S.H.* // Nature. 2001. V. 410. P. 268.
2. *Boccaletti S. et al.* // Phys. Reports. 2006. V. 424. P. 175.
3. *Buzsaki G., Draguhn A.* // Science. 2004. V. 304. P. 1926.
4. *Короновский А.А., Макаров В.А., Павлов А.Н., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии. М.: Физматлит, 2013.
5. *Moskalenko O.I., Phrolov N.S., Koronovskii A.A. et al.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2571.
6. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И. и др.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. 1. С. 21.
7. *Tass P., Rosenblum M.G., Weule J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3291.
8. *Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова и др.* // УФН. 2012. Т. 182. № 9. С. 905.
9. *Li C., Sun W., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. 046204.